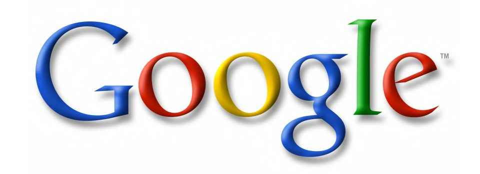
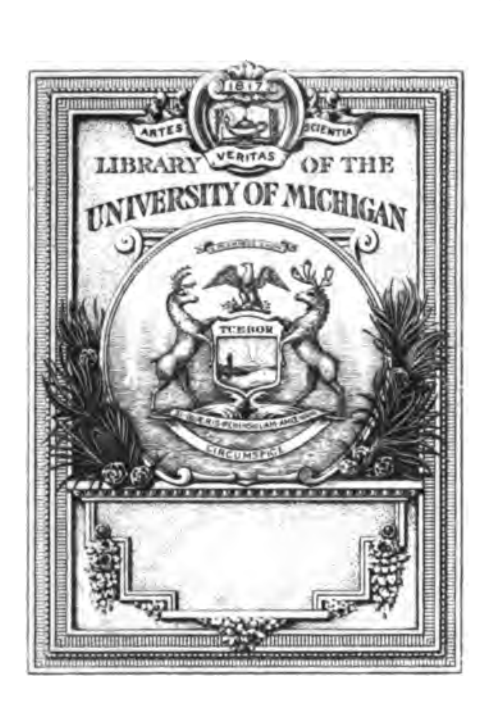





1817
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE

COURS
DE
MATHÉMATIQUES.

TROISIÈME PARTIE.

COURS
DE
MATHÉMATIQUES,
A L'USAGE
DES GARDES DU PAVILLON
ET DE LA MARINE.

Étienne
Par M. BÉZOUT, de l'Académie des Sciences, Examinateur des Gardes du Pavillon & de la Marine, des Élèves & des Aspirans au Corps de l'Artillerie, & Censeur de Livres.

TROISIÈME PARTIE,

Contenant l'ALGÈBRE & l'application de cette science à l'Arithmétique & à la Géométrie.

NOUVELLE ÉDITION, REVUE ET CORRIGÉE.



A PARIS,

Chez { RICHARD, Libraire, rue Haute-Feuille, N°. 11, au coin de la rue Serpente.
CAILLE, Libraire, rue Serpente, N°. 7. }

1798, v. st. AN VI.

PRÉFACE.

LES connoiſſances que nous avons expoſées dans les deux volumes précédens, ſervent de baſe à toutes les parties des Mathématiques; & la méthode que nous avons ſuivie pour les préſenter, peut ſervir à paſſer à des vérités plus compoſées. Mais en réfléchiſſant ſur cette méthode, on a pu remarquer que le nombre des propoſitions qu'on eſt obligé de ſe rappeler pour l'intelligence d'une propoſition nouvelle, s'accroît à meſure que celle-ci s'éloigne de l'origine de la chaîne qui les lie les unes aux autres.

Cette manière de procéder à la démonſtration ou à la recherche des vérités mathématiques, eſt ſans doute lumineuſe; mais elle devient de plus en plus pénible, à meſure que ces vérités s'éloignent davantage des connoiſſances primitives : elle a d'ailleurs l'inconvénient d'exiger de la part de l'eſprit, de nouvelles reſſources, de nouveaux expédiens, à meſure qu'on paſſe à de nouveaux objets.

Cependant, quelque différens que ſoient les objets des recherches mathématiques, les raiſonnemens & les opérations qu'ils exigent, ont des parties communes qu'on peut ramener à des règles générales, à l'aide deſquelles on peut ſoulager l'eſprit d'une grande

partie des efforts que chaque nouvelle queſtion ſembleroit exiger. La méthode qu'on appelle *Analyſe*, eſt celle qui enſeigne à trouver ces règles, & l'inſtrument qu'elle emploie pour y parvenir, s'appelle l'*Algèbre*.

L'Algèbre, ou l'art de repréſenter par des ſignes généraux toutes les idées qu'on peut ſe former relativement aux quantités, eſt à proprement parler, une langue en laquelle nous traduiſons d'abord certaines idées connues ; puis par des règles conſtantes, nous combinons ces idées à l'aide des caractères de cette langue ; & enfin, interprétant les réſultats de ces combinaiſons, nous en concluons des vérités que toute autre manière de procèder auroit rendues d'un accès très-difficile, & auxquelles même il ſeroit ſouvent impoſſible d'atteindre par une autre voie.

Les avantages principaux qu'on peut retirer de cette ſcience, ſont donc de ſe faciliter l'intelligence & la découverte des vérités mathématiques, & de ſe procurer des moyens faciles & des règles générales pour réſoudre toutes les queſtions qu'on peut propoſer ſur les quantités.

Les Méthodes de l'Algèbre ne nous étoient point néceſſaires dans les volumes précédens, où les objets étoient ſimples ; mais la ſynthèſe que nous y avons employée, ne peut nous procurer les mêmes facilités pour traiter ceux qui nous reſtent à parcourir. D'ailleurs une des choſes qu'on doit avoir en vue

dans l'étude des Mathématiques, c'est moins d'accumuler un grand nombre de propositions, que d'acquérir l'esprit de recherche & d'invention, qui seul peut faire mettre à profit les connoissances que l'on a acquises; or la manière de procéder en Algèbre, tend directement à ce but.

L'objet principal que nous nous proposons, en donnant l'Algèbre dans ce volume-ci, est de nous mettre en état de traiter, dans le suivant, la Mécanique, d'une manière facile & utile. Mais pour tirer de l'Algèbre les avantages qu'elle peut procurer, il faut s'être rendu familier l'usage des différentes opérations qu'elle enseigne, & s'être accoutumé à interpréter les phrases de cette langue; c'est pour cette raison, que nous avons renfermé dans ce même volume, plusieurs applications de l'Algèbre à l'Arithmétique & à la Géométrie. Nous nous étions proposé d'y faire entrer encore une autre branche de l'Analyse, celle qui regarde les quantités considérées comme variables, ou du moins d'en donner ce qui nous seroit nécessaire pour quelques applications utiles à la Mécanique; mais une espèce de nécessité de conserver à cette troisième partie le même caractère d'impression, qu'aux deux premières, ne nous permet pas d'exécuter ce projet pour le moment, sans passer de justes bornes.

Les différentes méthodes qu'on a suivies jusqu'ici,

pour expoſer les principes de l'Algèbre, ſe réduiſent à deux principales. La première conſiſte à donner les règles des quatre opérations fondamentales, & celles qui conduiſent à la réſolution des équations du premier degré, par une voie qu'on peut regarder comme ſynthétique. La ſeconde, qui eſt purement analytique, conduit à trouver ces règles, en propoſant des queſtions dont la réſolution exige certaines opérations & certains raiſonnemens, que par un examen poſtérieur, on trouve revenir les mêmes dans toutes les queſtions, & que par conſéquent on érige en règles générales. Cette dernière méthode ſembleroit d'abord préférable à la première, en ce qu'elle paroît devoir flatter l'amour-propre des Commençans, & irriter leur curioſité. Mais ſi l'on fait réflexion, qu'alors l'attention eſt néceſſairement partagée entre trois objets, ſavoir l'état de la queſtion, les raiſonnemens pour l'exprimer algébriquement, & les opérations qu'il faut faire à l'aide de ſignes dont la ſignification échappe d'autant plus aiſément qu'on eſt encore moins exercé à repréſenter ſes idées d'une manière abſtraite, il me ſemble qu'on doutera que cette méthode ſoit la meilleure, dans les commencemens, pour le plus grand nombre de lecteurs. Ne produiroit-elle pas, au contraire, un effet tout oppoſé à celui que quelques-uns lui attribuent? Les raiſonnemens qu'elle exige, quoique ſimples dans les commencemens, où

ſans doute, on ne traite que des queſtions ſimples, ces raiſonnemens, dis-je, devant être tirés du fond même de celui qui opère, ne l'humilieront-ils pas, lorſqu'ils ne ſe préſenteront pas à lui ? La méthode d'invention ſuppoſe toujours une certaine fineſſe; c'eſt celle qu'ont dû ſuivre les inventeurs, & par conſéquent celle des hommes de génie; or ceux-ci ne ſont certainement pas le plus grand nombre.

Ce ſont ces conſidérations qui nous ont déterminé à ſuivre la première méthode pour l'expoſition des règles fondamentales; mais comme un des objets que nous nous propoſons, eſt de faire acquérir au lecteur cette méthode d'invention, nous n'avons ſuivi la première, que juſqu'où il nous a paru néceſſaire de le faire, pour que le défaut d'habitude des ſignes algébriques, ne fût plus un obſtacle à l'intelligence de ce que nous aurions à préſenter.

Nous ne dirons rien de la manière dont les choſes ſont traitées; ce n'eſt plus à nous à la juger. Mais nous croyons pouvoir nous arrêter un moment ſur quelques-unes des matières que nous avons conſidérées; elles ſont de deux ſortes: les unes élémentaires; les autres, au moins pour la plus grande partie, ſuppoſent qu'on s'eſt rendu les premières très-familières. Pour les unes & pour les autres, nous avons fait enſorte de ne rien omettre de ce

qui peut être utile. Nous avons diſtingué celles de la ſeconde ſorte, par de petits caractères : quelques notes répandues dans l'ouvrage, & qui appartiennent à la partie élémentaire, ſont placées au bas des pages, & renvoyées par une étoile. Parmi les objets compris ſous le petit caractère, nous avons renfermé, entre autres choſes, 1°. le Précis d'une méthode, qu'on trouvera avec plus d'étendue, dans les Mémoires de l'Académie des Sciences pour l'année 1764, & qui a pour objet, l'élimination des inconnues dans les équations. C'eſt une partie de l'Algèbre, ſur laquelle il y a encore bien des choſes à faire, & qui importe d'autant plus à la perfection de cette ſcience, que la réſolution générale des équations en dépend abſolument. 2°. Une méthode pour la réſolution des équations. Nous ne dirons rien des tentatives qui ont été faites ſur cette matière depuis la naiſſance de l'Analyſe. Nous remarquerons ſeulement que juſqu'à nos jours, on n'a pas paſſé le quatrième degré ; on n'a pas même eu une méthode uniforme pour les degrés qu'on ſait réſoudre. On trouve à la vérité, dans l'Analyſe démontrée du P. Reyneau, une méthode que l'on y donne comme générale, & qui eſt due à M. Tſchirnaüs, qui la publia dans les Actes de Leipſik ; mais indépendamment des calculs rebutans & ſuperflus auxquels elle entraîne, elle ne réuſſit pour le quatrième degré, que par une modification

de la règle ; & quelques réflexions fur la forme que doivent néceffairement avoir les racines des équations des degrés fupérieurs, font bientôt voir qu'elle ne réuffiroit point paffé le quatrième degré. Les bornes que les matières plus néceffaires à notre objet, m'ont forcé de donner à l'expofition de la méthode que je propofe, m'ont empêché d'entrer dans quelques détails fur fon application au cinquième degré & aux degrés fupérieurs. Je m'étois même propofé de ne rien publier fur ce fujet, que lorfque, libre d'autres occupations, j'aurois pu y donner la perfection dont je le crois fufceptible; mais M. Euler ayant publié, dans le tome IX des *nouv. Comment. de Pétersbourg*, qui vient de paroître, une méthode fur la même matière, je donne ici les chofes, telles que je les ai trouvées d'abord, c'eft-à-dire, fur la fin de 1761. Au refte, on trouvera plus de détails dans les Mémoires de l'Académie ; on y trouvera entre autres chofes, une méthode pour les équations, dont le degré eft marqué par un nombre compofé ; cette méthode fimplifie le travail dans ces cas : nous aurions pû l'employer ici pour le quatrième degré ; mais dans le deffein où nous étions de faire voir ce que l'on pouvoit préfumer de l'application de notre méthode, aux degrés fuperieurs, nous avons préféré d'obferver l'uniformité.

Sous le même caractère d'impreffion, font encore

compris beaucoup d'autres objets que nous avons cru devoir traiter, pour ne pas obliger de recourir ailleurs.

Dans la feconde Section, nous nous fommes attaché à faire voir la manière d'appliquer l'Algèbre, d'en traduire les réfultats, de les exprimer par lignes. Nous avons tâché de faire bien entendre comment l'Algèbre comprend, dans une même équation, tous les différens cas d'une queftion; ce que fignifient les différentes racines, pofitives, négatives, réelles, ou imaginaires.

La connoiffance des principales propriétés des fections coniques, nous a paru devoir entrer dans notre plan, quelques-unes de ces courbes fe rencontrant affez fouvent dans l'Architecture Navale. Enfin, leur ufage pour la conftruction des équations nous y a encore déterminé. Nous avons fait enforte de préfenter ces objets & plufieurs autres qu'on trouvera dans le cours de l'Ouvrage, de manière qu'ils devinffent le germe de connoiffances plus étendues pour ceux qui defireront les acquérir.



TABLE DES MATIÈRES.

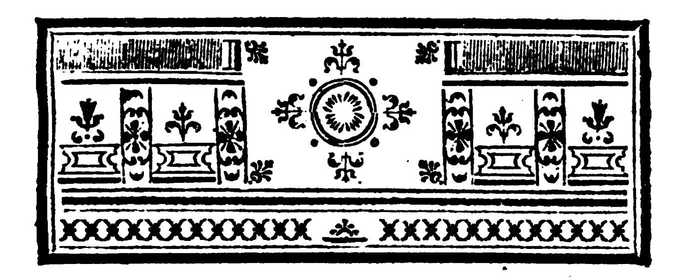
DE L'ALGÈBRE.

PREMIÈRE SECTION,

SECONDE SECTION,

Fin de la Table.

DE L'ALGÈBRE.



DE L'ALGÈBRE.

PREMIÈRE SECTION,

Dans laquelle on donne les principes du calcul des quantités Algébriques.

1. Le but de la ſcience qu'on appelle *Algèbre*, eſt de donner les moyens de ramener à des règles générales la réſolution de toutes les queſtions qu'on peut propoſer ſur les quantités.

Ces règles, pour être générales, ne doivent pas dépendre des valeurs particulières des quantités que l'on conſidère, mais bien de la nature de chaque queſtion, & doivent être toujours les mêmes pour toutes les queſtions d'une même eſpèce.

Il ſuit de-là que l'Algèbre ne doit point ſe borner à employer, pour repréſenter les quantités, les mêmes

caractères ou les mêmes signes que l'Arithmétique. En effet, lorsque, par les règles de celles-ci, on est parvenu à un résultat, rien ne retrace plus à l'esprit la route qui y a conduit. Qu'une ou plusieurs opérations arithmétiques m'aient donné 12 pour résultat, je ne vois rien dans 12 qui m'indique si ce nombre est venu de la multiplication de 3 par 4, ou de 2 par 6, ou de l'addition de 5 avec 7, ou de 2 avec 10, ou, en général, de toute autre combinaison d'opérations. L'Arithmétique donne des règles pour trouver certains résultats ; mais ces résultats ne peuvent pas fournir des règles. L'Algèbre doit remplir ces deux objets ; & pour y parvenir, elle représente les quantités par des signes généraux (ce sont les lettres de l'Alphabet), qui n'ayant aucune relation plus particulière avec un nombre qu'avec tout autre, ne représentent que ce qu'on veut ou ce que l'on convient de leur faire représenter. Ces signes toujours présens aux yeux dans toute la suite d'un calcul, conservent, pour ainsi dire, l'empreinte des opérations par lesquelles ils passent ; ou du moins ils offrent dans les résultats de ces opérations, des traces de la route qu'on doit tenir pour arriver au même but par les moyens les plus simples. Nous ne nous attachons point ici à développer davantage cette légère idée que nous donnons de l'Algèbre ; la suite de cet Ouvrage y est destinée.

Non-seulement on représente, en Algèbre, les quantités, par des signes généraux : on y représente aussi leur manière d'être les unes à l'égard des autres, & les différentes opérations qu'on a dessein de faire sur elles : en un mot, tout est représentation ; & lorsqu'on dit qu'on fait une opération, c'est une nouvelle forme qu'on donne à une quantité. A mesure que nous avancerons, nous ferons connoître ces différentes manières de représenter ce qui a rapport aux quantités.

Des opérations fondamentales sur les quantités considérées généralement.

2. On fait, en Algèbre, sur les quantités représentées par des lettres, des opérations analogues à celles qu'on fait en Arithmétique sur les nombres ; c'est-à-dire, qu'on les ajoute, on les soustrait, on les multiplie, on les divise, &c. ; mais ces opérations différent de celles de l'Arithmétique, en ce que leurs résultats ne sont souvent que des indications d'opérations arithmétiques.

De l'Addition & de la Soustraction.

3. L'addition des quantités semblables n'a besoin d'aucune règle ; il est évident que pour ajouter une quantité représentée par a, avec la même quantité a,

il faut écrire $2a$. Pour ajouter $2a$, avec $3a$, il faut écrire $5a$, & ainſi de ſuite.

Quant aux quantités diſſemblables, & qu'on repréſente toujours par des lettres différentes, on ne fait qu'indiquer cette addition ; & cela s'indique par le moyen de ce ſigne $+$, qui ſe prononce *plus*. Ainſi, ſi l'on veut ajouter une quantité repréſentée par a, avec une autre repréſenté par b, on ne peut faire autre choſe qu'écrire $a + b$; enſorte qu'on ne connoît véritablement le réſultat que quand on connaît les valeurs particulières des quantités repréſentées par a & par b; ſi a vaut 5, & ſi b vaut 12, $a + b$ vaudra 17.

Pareillement, pour ajouter $5a + 3b$, avec $9a + 2c$ & $9b + 3d$, on écrira $5a + 3b + 9a + 2c + 9b + 3d$; & raſſemblant les quantités ſemblables, on aura $14a + 12b + 2c + 3d$.

4. Il y a les mêmes choſes à dire ſur la ſouſtraction que ſur l'addition. Si les quantités ſont ſemblables, on n'a beſoin d'aucune règle : il eſt évident que ſi de $5a$ on veut retrancher $2a$, il reſte $3a$.

Mais ſi les quantités ſont diſſemblables, on ne peut qu'indiquer la ſouſtraction ; cela s'indique à l'aide de ce ſigne —, qu'on prononce en diſant *moins*. Ainſi ſi l'on a b à retrancher de a, on écrira $a - b$. Pour retrancher $3b$ de $5a$, on écrira $5a$

$-3b$. Pour retrancher $5a + 4b$, de $9a + 6b$, on écrira $9a + 6b - 5a - 4b$, & faisant déduction des quantités semblables (ce qu'on appelle faire la *réduction*), on a pour reste $4a + 2b$. Enfin pour retrancher $5a + 3b + 4c$ de $6a + 4b + 4d$, on écrira $6a + 4b + 4d - 5a - 3b - 4c$, & en réduisant, on aura $a + b + 4d - 4c$.

5. Un nombre qui précède une lettre s'appelle le *coëfficient* de cette lettre ; ainsi dans $3b$, 3 est le coëfficient de b. Lorsqu'une lettre doit avoir 1 pour coëfficient, on ne met point ce coëfficient : ainsi lorsque de $3a$ on retranche $2a$, il reste $1a$; on écrit seulement a. Il faut donc bien se garder de croire que le coëfficient d'une lettre, lorsqu'il ne paroît point, soit zéro ; il est alors l'unité ou 1.

6. Il importe peu dans quel ordre on écrive les quantités qu'on ajoute ou qu'on retranche ; si l'on a a à ajouter avec b, on peut indifféremment écrire $a + b$ ou $b + a$; & pour retrancher b de a, on peut écrire également $a - b$ ou $- b + a$. Mais comme on prononce plus aisément les lettres dans l'ordre alphabétique que dans tout autre, nous suivrons cet ordre autant que nous le pourrons.

7. Remarquons encore que lorsqu'une quantité n'a point de signe, elle est censée avoir le signe + ;

a eſt la même choſe que $+ a$. On eſt dans l'uſage de ſupprimer le ſigne dans la quantité qu'on écrit la première, lorſque cette quantité doit avoir le ſigne $+$; mais ſi elle devait avoir le ſigne $-$, il ne faudroit pas l'omettre.

8. Lorſqu'après une opération on procède à la réduction, il peut arriver que l'on ait une quantité à retrancher d'une autre plus petite : alors on retranche la plus petite, de la plus grande, & on donne au reſte, le ſigne de la plus grande. Par exemple, ſi après avoir ajouté $2a + 3b$, avec $5a - 7b$, on veut réduire le réſultat $2a + 3b + 5a - 7b$, on écrira $7a - 4b$, en retranchant $3b$ de $7b$, & donnant au reſte $4b$, le ſigne qu'avoit $7b$. En effet le ſigne $-$ de $7b$ dans la quantité $5a - 7b$, indique que $7b$ doit être retranché ; mais ſi l'on vient à augmenter $5a - 7b$ de la quantité $2a + 3b$, il eſt viſible que les $3b$ qu'on ajoute, diminuent d'autant la ſouſtraction qu'on avoit à faire ; il ne doit donc plus y avoir que $4b$ à retrancher ; il faut donc qu'il y ait $- 4b$ dans le réſultat. De-là nous conclurons cette règle générale : *L'addition des quantités algébriques ſe fait en écrivant leurs parties, à la ſuite les unes des autres, avec leurs ſignes tels qu'ils ſont : on réduit enſuite les quantités ſemblables, à une ſeule, en raſſemblant d'une part toutes celles qui*

ont le signe +, & d'une autre part, toutes celles qui ont le signe —; enfin on retranche le plus petit résultat, du plus grand, & on donne au reste, le signe qu'avoit le plus grand.

EXEMPLE.

On veut ajouter les quatre quantités suivantes :

$$5a + 3b - 4c$$
$$2a - 5b + 6c + 2d$$
$$a - 4b - 2c + 3e$$
$$7a + 4b - 3c - 6e$$

Somme .... $5a + 3b - 4c + 2a - 5b + 6c + 2d + a - 4b - 2c + 3e + 7a + 4b - 3c - 6e$.

Faisant la réduction, j'ai pour les a, $15a$; pour les b, j'ai $+7b$ d'une part & $-9b$ de l'autre, & par conséquent $-2b$ pour reste; pour les c, j'ai $-9c$ d'une part, & $+6c$ de l'autre, & par conséquent $-3c$ pour reste; réduisant les autres de même, on trouve enfin $15a - 2b - 3c + 2d - 3e$.

9. Les quantités séparées par les signes + & —, s'appellent les *termes* des quantités dont elles font parties.

10. Une quantité est appellée *Monome*, *Binome*, *Trinome*, &c. selon qu'elle est composée de 1, ou de 2, ou de 3, &c. termes; & une quantité composée de plusieurs termes dont on ne définit pas le nombre, s'appelle en général un *Polynome*.

11. A l'égard de la soustraction des quantités algébriques, voici la règle générale : *Changez les signes*

des termes de la quantité que vous devez soustraire, c'est-à-dire, changez + en —, & — en +; ajoutez ensuite cette quantité, ainsi changée, avec celle dont on doit soustraire, & réduisez.

EXEMPLE.

De $6a - 3b + 4c$ on veut retrancher la quantité $5a - 5b + 6c$.

A la suite de $6a - 3b + 4c$, j'écris $- 5a + 5b - 6c$, qui est la seconde quantité, dans laquelle on a changé les signes; & j'ai $6a - 3b + 4c - 5a + 5b - 6c$, & en réduisant, $a + 2b - 2c$ pour reste.

Pour rendre raison de cette règle, prenons un exemple plus simple. Supposons que de a on veuille retrancher b, il est évident qu'on doit écrire $a - b$; mais si de a on vouloit retrancher $b - c$, je dis qu'il faut écrire $a - b + c$; en effet il est clair qu'ici ce n'est pas b tout entier qu'il s'agit de retrancher, mais seulement b diminué de c; si donc on retranche d'abord b tout entier en écrivant $a - b$, il faut ensuite, pour compenser, ajouter ce qu'on a ôté de trop, il faut donc ajouter c, il faut donc écrire $a - b + c$, c'est-à-dire, qu'il faut changer les signes de tous les termes de la quantité qu'on doit soustraire.

Dans les nombres, cette attention n'est pas nécessaire, parce que si l'on avoit $8 - 3$, par exemple,

à retrancher de 12, on commenceroit par diminuer 8 de 3, ce qui donneroit 5 qu'on retrancheroit de 12, & on auroit 7 pour reſte; mais on voit auſſi qu'on pourroit retrancher d'abord 8 de 12, & au reſte 4 ajouter 3, ce qui donneroit également 7; or c'eſt ce dernier parti qu'on prend & qu'il faut néceſſairement prendre en Algèbre, parce qu'on ne peut faire la réduction préliminaire comme ſur les nombres.

12. Les quantités précédées du ſigne +, ſe nomment quantités *poſitives*; & celles qui ſont précédées du ſigne —, ſe nomment quantités *négatives*. Nous entrerons par la ſuite, dans quelque détail ſur la nature & les uſages de ces quantités conſidérées ſéparément l'une de l'autre.

De la Multiplication.

13. La Multiplication algébrique exige quelques conſidérations qui lui ſont particulières, & qui n'ont pas lieu dans la multiplication arithmétique. Indépendamment des quantités, il y a encore les ſignes à conſidérer.

Au reſte, à ne conſidérer que les valeurs numériques des quantités repréſentées par les lettres, on doit ſe former de la multiplication algébrique, la

même idée que de la multiplication arithmétique (*Arithm*, 40); ainsi, multiplier a par b, c'est prendre la quantité représentée par a, autant de fois qu'il y a d'unités dans la quantité représentée par b.

14. Mais comme l'objet est ici de faire ou de représenter la multiplication, indépendamment des valeurs numériques des quantités, il faut convenir des signes par lesquels nous indiquerons cette multiplication.

On fait souvent usage de ce signe $\times$, qui signifie *multiplié par*; ensorte que $a \times b$ signifie a multiplié par b, ou que l'on doit multiplier a par b.

On fait aussi usage du point, que l'on interpose entre les deux quantités qu'on doit multiplier; ensorte que $a . b$ & $a \times b$ signifient la même chose.

Enfin on indique encore la multiplication (du moins entre les quantités monomes), en ne mettant aucun signe entre le multiplicande & le multiplicateur; ainsi $a \times b$, $a . b$, ab sont trois expressions dont chacune désigne qu'on doit multiplier a par b. Cette dernière est la plus usitée.

15. Pour multiplier ab par c, on écrira donc abc. Pour multiplier ab par cd, on écrira $abcd$, & ainsi

de ſuite : il importe peu d'ailleurs dans quel ordre ces lettres ſoient écrites, parce que (*Arith.* 44) le produit eſt toujours le même dans quelque ordre qu'on multiplie.

16. Lors donc qu'à l'avenir nous rencontrerons une quantité comme ab, ou abc, ou $abcd$, &c., dans laquelle pluſieurs lettres ſe trouveront écrites de ſuite ſans aucun ſigne, nous en conclurons que cette quantité repréſente le produit de la multiplication ſucceſſive de chacune des lettres qui la compoſent.

17. Nous avons nommé (*Arith.* 42) facteur d'un produit, tout nombre qui, par la multiplication, a concouru à former ce produit; ainſi dans ab, a & b ſont les facteurs ; dans abc, les facteurs ſont a, b, c, & ainſi de ſuite.

18. Il ſuit de la règle que nous venons de donner (15), que *le produit de la multiplication de pluſieurs quantités algébriques monomes, doit renfermer toutes les lettres qui ſe trouvent tant dans le multiplicande que dans le multiplicateur.*

Cela poſé, ſi les quantités qu'on doit multiplier étoient compoſées de la même lettre, cette lettre ſe trouveroit donc écrite dans le produit autant de fois qu'elle l'eſt dans tous les facteurs enſemble,

quel que ſoit le nombre des quantités qu'on aït à multiplier : ainſi *a* multiplié par *a* donneroit *aa* ; *aa* multiplié par *aaa* donneroit *aaaaa* ; *aa* multiplié par *aaa* & multiplié encore par *a*, donneroit *aaaaaa*.

19. Dans ce cas, on eſt convenu de n'écrire cette lettre qu'une ſeule fois, mais de marquer, par un chiffre qu'on appelle *Expoſant*, & qu'on place ſur la droite & un peu au-deſſus de la lettre, combien de fois cette lettre eſt facteur, ou combien de fois elle doit être écrite. Au lieu de *aa*, on écrira donc a^2 ; au lieu de *aaa*, on écrira a^3 ; au lieu de *aaaaa*, on écrira a^5, & ainſi des autres.

Souvenons-nous donc à l'avenir, que *l'expoſant d'une lettre, marque combien de fois cette lettre eſt facteur dans un produit.* Dans $a^3 b^2 c$ il y a trois facteurs de valeur différente, ſavoir, *a*, *b*, *c* : mais, de ces lettres, la première eſt facteur trois fois ; la ſeconde, deux fois ; & la troiſième, une fois : en effet, $a^3 b^2 c$ équivaut à *aaabbc*.

Il faut donc bien ſe garder de confondre l'expoſant avec le coëfficient ; de confondre, par exemple, a^2 avec $2a$, a^3 avec $3a$: dans $2a$, le coëfficient 2 marque que *a* eſt ajouté avec *a*, c'eſt-à-dire, que $2a$ équivaut à $a+a$; mais dans a^2, l'expoſant 2

marque que la lettre a devroit être écrite deux fois de suite sans aucun signe ; qu'elle est multipliée par elle-même, ou enfin qu'elle est facteur deux fois ; c'est-à-dire, que a^2 équivaut à $a \times a$; ensorte que si a vaut 5, par exemple, $2a$ vaut 10 ; mais a^2 vaut 25.

20. On voit donc que *pour multiplier deux quantités monomes qui auroient des lettres communes, on peut abréger l'opération, en ajoutant tout de suite les exposans des lettres semblables du multiplicande & du multiplicateur.* Ainsi pour multiplier a^5 par a^3, j'écris a^8, c'est-à-dire, que j'écris la lettre a en lui donnant pour exposant, les deux exposans 5 & 3 réunis. De même pour multiplier a^3b^2c par a^4b^3cd, j'écris $a^7b^5c^2d$, en écrivant d'abord toutes les lettres différentes $abcd$, & donnant ensuite à la première pour exposant 7 qui est la somme des exposans 3 & 4 ; à la seconde, 5 qui est la somme des deux exposans 2 & 3 ; & à la troisième, 2 qui est la somme des deux exposans 1 & 1 ; car quoique l'exposant de c ne soit pas marqué, on doit néanmoins sous-entendre qu'il est 1, puisque c est facteur une fois ; donc *toute lettre dont l'exposant n'est point écrit, est censée avoir* 1 *pour exposant ; & réciproquement, toutes les fois qu'une lettre devra avoir* 1 *pour exposant, on peut se dispenser d'écrire cet exposant.*

Telle eſt la règle pour les lettres dans les quantités monomes.

21. Quand les quantités monomes ſont précédées d'un chiffre, c'eſt-à-dire, d'un coëfficient, il faut commencer la multiplication par ce coëfficient, & cette multiplication ſe fait ſuivant les règles de l'Arithmétique ; ainſi pour multiplier $5a$ par $3b$, je multiplie d'abord 5 par 3, puis a par b, & je trouve $15ab$ pour produit. Pareillement, ſi j'ai $12a^3b^2$ à multiplier par $9a^4b^3$, j'aurai $108a^7b^5$.

Nous avons dit en Arithmétique, qu'une quantité étoit élevée à la première, ſeconde, troiſième, &c. puiſſance, ou au premier, ſecond, troiſième degré, ſelon qu'elle étoit facteur 1, 2, 3, &c. fois ; donc une lettre qui a pour expoſant 1, ou 2, ou 3, ou 4, &c., eſt cenſée élevée à la première, ou à la ſeconde, ou à la troiſième puiſſance ; ainſi a^2 eſt la ſeconde puiſſance ou le quarré de a ; a^3 eſt le cube ou la troiſième puiſſance de a, & ainſi de ſuite.

22. Ces principes poſés, venons à la multiplication des quantités complexes. Il faut, pour cette multiplication, ſuivre le même procédé qu'on ſuit en Arithmétique pour les nombres qui ont pluſieurs chiffres, c'eſt-à-dire, qu'il faut multiplier ſucceſſivement chacun des termes du multiplicande, par chacun

des termes du multiplicateur, & cela en obſervant les règles que nous venons de donner pour les monomes. On n'eſt point aſſujetti, comme en Arithmétique, à opérer en allant de droite à gauche plutôt que de gauche à droite; cela eſt indifférent; nous prendrons même ce dernier parti qui eſt le plus en uſage.

EXEMPLE Ier.

On propoſe de multiplier $a + b$
par c

Produit . . . $ac + bc$.

1°. Je multiplie a par c, ce qui (15) me donne ac. 2°. Je multiplie b par c, ce qui me donne bc; j'ajoute ce ſecond produit au premier en les uniſſant par le ſigne $+$, & j'ai $ac + bc$ pour produit total.

S'il y avoit un ſecond terme au multiplicateur, je multiplierois actuellement par ce ſecond terme, & j'ajouterois ce ſecond produit au premier.

EXEMPLE II.

Si j'avois . . . . $a + b$
à multiplier par . . $c + d$

Produit . . . . $ac + bc + ad + bd$

Après avoir multiplié a & b par c, ce qui donne $ac + bc$, je multiplierois auſſi a & b par d, ce qui me donneroit $ad + bd$, qui joint au premier produit, donne $ac + bc + ad + bd$. En effet, multiplier $a + b$ par $c + d$, c'eſt prendre non-ſeulement a, mais encore b, autant de fois qu'il y a d'unités

dans la totalité de $c+d$, c'eſt-à-dire, autant de fois qu'il y a d'unités dans c, plus autant de fois qu'il y a d'unités dans d.

EXEMPLE III.

On propoſe de multiplier $a - b$
par c

Produit . . . . . $ac - bc$.

Après avoir multiplié a par c ce qui donne ac, je multiplie b par c, ce qui me donne bc; mais au lieu d'ajouter ce dernier produit au premier, je l'en retranche, parce qu'ici ce n'eſt point la ſomme des deux quantités a & b qu'il s'agit de multiplier, mais ſeulement leur différence, puiſque $a - b$ ſignifie qu'on doit retrancher b de a; or ſi l'on multiplie a tout entier, ainſi qu'on le fait par la première opération, il eſt viſible qu'on y multiplie de trop la quantité b dont a devoit être diminué; il faut donc ôter de ce produit, la quantité b multipliée par c, c'eſt-à-dire, ôter bc.

Dans les nombres, cette attention n'eſt pas néceſſaire, parce qu'avant de faire la multiplication, on feroit la ſouſtraction qui eſt indiquée ici dans le multiplicande. Si l'on avoit, par exemple, $8 - 3$ à multiplier par 4, on réduiroit tout de ſuite le multiplicande $8 - 3$ à 5, que l'on multiplieroit enſuite par 4. Mais on voit auſſi qu'on viendroit également au même réſultat en multipliant d'abord 8 par 4, ce qui donneroit 32, puis 3 par 4, ce qui donneroit 12, & retranchant ce dernier produit du premier, on auroit 20 comme par la première voie; or cette ſeconde manière qu'il ſeroit peut-être ridicule d'employer pour les nombres, devient indiſpenſable pour les quantités littérales, puiſque dans celles-ci la ſouſtraction préliminaire ne peut avoir lieu.

EXEMPLE

EXEMPLE IV.

On propose de multiplier $a - b$
par . . . . $c - d$

Produit . . . . $ac - bc - ad + bd$.

On multipliera d'abord $a - b$ par c, ce qui donnera $ac - bc$; on multipliera ensuite $a - b$ par d, ce qui donnera $ad - bd$; enfin on retranchera ce second produit $ad - bd$, du premier, & (11) on aura $ac - bc - ad + bd$ pour produit total.

En effet, puisque le multiplicateur est moindre que c, de la quantité d, il marque qu'il ne faut prendre le multiplicande qu'autant de fois qu'il y a d'unités dans c diminué de d; or comme on ne peut faire cette diminution avant la multiplication, on peut prendre d'abord $a - b$ autant de fois qu'il y a d'unités dans c, c'est-à-dire, multiplier $a - b$ par c, puis en retrancher $a - b$ pris autant de fois qu'il y a d'unités dans d, c'est-à-dire, en retrancher le produit de $a - b$ par d.

23. Si l'on fait attention aux signes des termes qui composent le produit total $ac - bc - ad + bd$, & qu'on les compare avec les signes des termes du multiplicande & du multiplicateur qui les ont donnés, on observera 1°. que le terme a qui est censé avoir le signe $+$, étant multiplié par le terme c qui est censé aussi avoir le signe $+$, a donné pour produit ac qui est censé avoir le signe $+$.

2°. Que le terme b qui a le signe $-$, étant multiplié par le terme c qui est censé avoir le signe $+$, a donné pour produit bc avec le signe $-$.

3°. Que le terme a qui a le ſigne $+$, multiplié par le terme d qui a le ſigne $-$, a donné pour produit ad avec le ſigne $-$.

4°. Enfin que le terme b qui a le ſigne $-$, étant multiplié par le terme d qui a auſſi le ſigne $-$, a donné pour produit le terme bd qui a le ſigne $+$.

Donc à l'avenir nous pourrons reconnoître facilement dans les multiplications partielles, ſi les produits particuliers doivent être ajoutés ou retranchés; il ſuffira pour cela d'obſerver les deux règles ſuivantes que nous fourniſſent les obſervations que nous venons de faire.

24. *Si les deux termes que l'on doit multiplier l'un par l'autre ont tous deux le même ſigne, c'eſt-à-dire, ou tous deux* $+$ *ou tous deux* $-$, *leur produit aura toujours le ſigne* $+$. *Si au contraire ils ont différens ſignes, c'eſt-à-dire, l'un* $+$ *& l'autre* $-$, *ou l'un* $-$ *& l'autre* $+$, *leur produit aura toujours le ſigne* $-$.

A l'aide de ces règles & de celles que nous avons données (15, 20, 21 & 22), on eſt en état de faire toute multiplication algébrique. Mais pour procéder avec méthode, on obſervera d'abord la règle des ſignes, puis celle des coëfficiens, enfin celle des lettres & des expoſans.

Terminons par un exemple où toutes ces règles ſoient appliquées.

EXEMPLE V.

On propoſe de multiplier $5a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2$
par . . . . $a^3 - 4a^2b + 2b^3$

$$\begin{array}{l} 5a^7 \quad - 2a^6b + 4a^5b^2 \\ - 20a^6b + 8a^5b^2 - 16a^4b^3 \\ + 10a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5 \end{array}$$

Produit $5a^7 - 22a^6b + 12a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$

Je multiplie ſucceſſivement les trois termes $5a^4$, $-2a^3b$, $+4a^2b^2$, par le premier terme a^3 du multiplicateur. Les deux termes $5a^4$ & a^3 ayant le même ſigne, le produit (24) doit avoir le ſigne $+$; mais j'omets ce ſigne, parce qu'il appartient au premier terme du produit (7). Je multiplie enſuite le coëfficient 5 de a^4, par le coëfficient 1 de a^3 (21), ce qui me donne 5; enfin multipliant a^4 par a^3 ſelon la règle donnée (20) c'eſt-à-dire, ajoutant les deux expoſans 4 & 3, j'ai a^7, & par conſéquent $5a^7$ pour produit.

Je paſſe au terme $-2a^3b$; & pour le multiplier par a^3, je vois que les ſignes de ces deux quantités étant différens, le produit doit avoir le ſigne $-$; je multiplie enſuite le coëfficient 2 de a^3b par le coëfficient 1 de a^3, & enfin a^3b par a^3, & j'ai $-2a^6b$ pour produit.

Par un procédé ſemblable, le terme $+4a^2b^2$ multiplié par a^3 donnera $+4a^5b^2$.

Après avoir multiplié tous les termes du multiplicande par a^3, il faut les multiplier par le ſecond terme $-4a^2b$ du multiplicateur. Le terme $5a^4$ multiplié par $-4a^2b$ de

signe différent donnera $-20a^6b$; le terme $-2a^3b$ multiplié par $-4a^2b$ de même signe, donnera $+8a^5b^2$; & le terme $+4a^2b^2$ multiplié par $-4a^2b$ de signe différent, donnera $-16a^4b^3$.

Enfin on passera à la multiplication par le terme $+2b^3$, & en suivant les mêmes règles on trouvera $+10a^4b^3$, $-4a^3b^4+8a^2b^5$ pour les trois produits partiels.

Faisant attention que parmi tous les différens produits partiels qu'on vient de trouver, il y a des termes semblables, c'est-à-dire, composés des mêmes lettres avec les mêmes exposans, on fera la réduction en réunissant ceux qui ont le même signe & déduisant ceux qui ont des signes contraires, ce qui donnera enfin $5a^7-22a^6b+12a^5b^2$ $-6a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5$ pour produit total.

25. Comme il importe de se familiariser avec la pratique de cette règle, nous joignons ici (*Voy.* pag. 33), pour exercer les Commençans, une Table qui renferme plusieurs exemples. Nous ajouterons en même temps quelques remarques sur quelques-uns de ces exemples.

Dans le premier, on a multiplié $a+b$ qui représente généralement la somme de deux quantités, par $a-b$ qui représente généralement leur différence, & l'on trouve pour produit a^2-b^2 qui est la différence du quarré de la première au quarré de la seconde, ou la différence des quarrés de ces deux quantités. On peut donc dire généralement que *la somme de deux quantités, multipliée par leur différence, donne toujours, pour produit, la différence des quarrés de ces mêmes quantités.* Que l'on prenne deux nombres quelconques, 5

& 3, par exemple; leur ſomme eſt 8 & leur différence 2, leſquelles multipliées l'une par l'autre donnent 16, qui eſt en effet la différence du quarré de 5 au quarré de 3, c'eſt-à-dire, de 25 à 9. Et réciproquement, *la différence des quarrés des deux quantités, peut toujours être conſidérée comme formée par la multiplication de la ſomme de ces deux quantités par leur différence.* Ainſi la quantité $b^2 - c^2$ qui eſt la différence du quarré de b au quarré de c, vient de la multiplication de $b + c$ par $b - c$. Ces deux propoſitions nous feront utiles par la ſuite.

On peut déjà remarquer en paſſant, un des uſages de l'Algèbre pour découvrir des vérités générales.

Le ſecond exemple fait voir d'une manière générale & ſimple ce que nous avons dit en Arithmétique ſur la compoſition du quarré, ſavoir que *le quarré de la ſomme* $a + b$ *de deux quantités, eſt compoſé du quarré* a^2 *de la première, du double* $2ab$ *de la première multipliée par la ſeconde, & du quarré* b^2 *de la ſeconde.*

Le troiſième exemple confirme ce que nous avons dit auſſi en Arithmétique ſur la formation du cube. On y voit $a^2 + 2ab + b^2$, quarré de $a + b$, qui après avoir été multiplié par $a + b$, donne $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ dont le premier terme eſt le cube de a, le ſecond qui eſt le même que $3a^2 \times b$ eſt le triple du quarré de a, multiplié par b; on voit de même que $3ab^2$ eſt le triple de a multiplié par le quarré de b; & enfin b^3 eſt le cube de b.

26. Pour indiquer la multiplication entre deux quantités complexes, on eſt dans l'uſage de renfermer chacune de ces deux quantités entre deux

crochets, & d'interpofer entre elles l'un des fignes de multiplication dont nous avons parlé plus haut (14); quelquefois même on n'interpofe aucun figne : ainfi pour marquer que la totalité de la quantité $a^2 + 3ab + b^2$ doit être multipliée par la totalité de $2a + 3b$, on écrit $(a^2 + 3ab + b^2) \times (2a + 3b)$ ou $(a^2 + 3ab + b^2).(2a + 3b)$ ou fimplement $(a^2 + 3ab + b^2)(2a + 3b)$. Quelquefois au lieu d'écrire chaque quantité entre deux crochets, on couvre chacune d'une barre en cette manière, $\overline{a^2 + 3ab + b^2} \times \overline{2a + 3b}$.

27. Il y a beaucoup de cas où il eft plus avantageux d'indiquer la multiplication que de l'exécuter. On ne peut donner de règles générales fur ce fujet, parce que cela dépend des circonftances qui donnent lieu à ces opérations : nous verrons par la fuite plufieurs de ces cas. C'eft principalement par l'ufage qu'on apprend à les diftinguer. On peut, cependant, dire affez généralement, qu'il convient de fe contenter d'indiquer les multiplications, lorfque celles-ci doivent être fuivies de la divifion, parce que cette dernière opération s'exécutant fouvent, ainfi qu'on va le voir, par la feule fuppreffion des facteurs communs au dividende & au divifeur, on diftingue plus facilement ces facteurs communs, lorfqu'on n'a fait qu'indiquer la multiplication.

De la Division.

28. La manière de faire cette opération en Algèbre, dépend beaucoup des ſignes que nous ſommes convenus d'employer pour la multiplication. L'objet en eſt d'ailleurs le même qu'en Arithmétique.

29. Lorſque la quantité qu'on propoſera à diviſer n'aura aucune lettre commune avec le diviſeur, alors ils n'eſt pas poſſible d'exécuter l'opération ; on ne peut que l'indiquer, & cela ſe fait en écrivant le diviſeur au-deſſous du dividende, en forme de fraction, & ſéparant l'un de l'autre par un trait ; ainſi pour marquer qu'on doit diviſer a par b, on écrit $\frac{a}{b}$, & l'on prononce a diviſé par b ; pour marquer qu'on doit diviſer $aa + bb$ par $c + d$, on écrit $\frac{aa + bb}{c + d}$.

30. Lorſque le dividende & le diviſeur ſont monomes, ſi toutes les lettres qui ſe trouvent dans le diviſeur, ſe trouvent auſſi dans le dividende, la diviſion peut être faite exactement, & on l'exécutera en ſuivant cette règle... *Supprimez dans le dividende, toutes les lettres qui lui ſont communes avec le diviſeur ; les lettres qui reſteront, compoſeront le quotient.* Ainſi pour diviſer ab par a, je ſupprime a dans le dividende ab, & j'ai b pour quotient. Pour

diviſer abc par ab, je ſupprime ab dans le dividende, & j'ai c pour quotient.

En effet, puiſque (15) les lettres écrites ſans aucun ſigne interpoſé, ſont les facteurs de la quantité dans laquelle elles entrent, les lettres du diviſeur, qui ſont communes au dividende, ſont donc facteurs de ce dividende; or nous avons vu (*Arith.* 69) que lorſqu'on diviſe un produit par un de ſes facteurs, on doit trouver pour quotient l'autre facteur; donc le quotient doit être compoſé des lettres du dividende qui ne ſont point communes entre celui-ci & le diviſeur.

31. Il ſuit de-là que lorſqu'il y aura des expoſans, la règle qu'on doit ſuivre, eſt de *retrancher l'expoſant de chaque lettre du diviſeur, de l'expoſant de pareille lettre du dividende;* ainſi pour diviſer a^3 par a^2, je retranche 2 de 3, il me reſte 1, & par conſéquent j'ai a^1 ou a pour quotient. De même, ayant à diviſer $a^4b^3c^2$ par a^2bc, j'aurai a^2b^2c. En effet $\frac{a^3}{a^2}$ eſt la même choſe que $\frac{aaa}{aa}$ qui ſelon la règle donnée (30) ſe réduit à a, en ôtant les lettres communes au dividende & au diviſeur. En général puiſque le quotient ne doit avoir que les lettres qui ne ſont point communes au dividende & au diviſeur, l'expoſant de chaque lettre du quotient ne

doit donc être que la différence entre les exposans de cette lettre dans le dividende & dans le diviseur.

32. Donc si une lettre a le même exposant dans le dividende & dans le diviseur, elle aura zéro pour exposant dans le quotient; ainsi a^3 divisé par a^3 donnera a^0; a^3bc^2 divisé par a^2bc^2 donne $a^1b^0c^0$ ou ab^0c^0. Dans ce cas on peut se dispenser d'écrire les lettres qui ont o pour exposant; car chacune d'elles n'est autre chose que l'unité. En effet, lorsqu'on divise a^3 par a^3, on cherche combien de fois a^3 contient a^3; or il le contient évidemment 1 fois; le quotient doit donc être 1 : d'un autre côté a^3 divisé par a^3 donne pour quotient, a^0; donc a^0 vaut 1. En général *toute quantité qui a zéro pour exposant, vaut* 1.

33. Si quelques lettres du diviseur ne sont pas communes au dividende, ou si quelques-uns des exposans du diviseur sont plus grands que ceux de pareilles lettres du dividende, alors la division ne peut être faite exactement : on ne peut que l'indiquer comme il a été dit ci-dessus (29). Mais on peut simplifier le quotient ou la quantité fractionnaire qui le représente alors. La règle qu'il faut suivre pour cela, est de supprimer dans le dividende & dans le diviseur, les lettres qui leur sont communes; ensorte que s'il y a des exposans, on efface la lettre qui

a le plus petit exposant, & l'on diminue de pareille quantité le plus grand exposant de la même lettre.

Par exemple, si l'on propose de diviser $a^5 b c^3$ par $a^2 b^3 c^4$, on écrira $\frac{a^5 b c^3}{a^2 b^3 c^4}$ que l'on réduira en cette manière; on effacera a^2 dans le diviseur, & l'on écrira seulement a^3 dans le dividende; on effacera b dans le dividende, & l'on écrira seulement b^2 dans le diviseur; enfin on effacera c^3 dans le dividende, & l'on écrira seulement c dans le diviseur; ensorte qu'on aura $\frac{a^3}{b^2 c}$. On trouvera de même que $\frac{a^2 b^5 c^3}{a^3 b c^2 d}$ se réduit à $\frac{b^4 c}{a d}$.

Si par ces opérations, il ne restoit plus aucune lettre dans le dividende, il faudroit écrire l'unité; ainsi $\frac{a^2}{a^3}$ se réduira à $\frac{1}{a}$.

La raison de ces règles est facile à saisir après tout ce qui a été dit ci-dessus; car, supprimer, ainsi qu'on le prescrit, le même nombre de lettres dans le dividende & dans le diviseur, c'est diviser, par une même quantité, chacun des deux termes de la fraction qui exprime le quotient; or cette opération (*Arith.* 89) n'en change point la valeur & simplifie la fraction.

34. Jusqu'ici nous n'avons pas eu égard au coëfficient que peuvent avoir le dividende, ou le diviseur, ou tous les deux. La règle qu'on doit suivre

à leur égard eſt de les diviſer comme en Arithmétique ; & ſi la diviſion ne peut pas être faite exactement, on les laiſſe ſous la forme de fraction, que l'on réduit à ſa plus ſimple expreſſion (*Arith.* 92), lorſque cela eſt poſſible.

Par exemple, ayant à diviſer $8a^3b$ par $4a^2b$, je diviſe 8 par 4, & j'ai pour quotient, 2; diviſant enſuite a^3b par a^2b, j'ai pour quotient, a, & par conſéquent $2a$ pour quotient total. Ayant à diviſer $8a^3b^2$ par $6ab$, j'écris $\frac{8a^3b^2}{6ab}$ que je réduis à $\frac{4a^2b}{3}$.

35. La règle que nous venons de donner (33), eſt générale, ſoit que le dividende & le diviſeur ſoient monomes, ſoit qu'ils ſoient complexes ou polynomes, pourvu que dans ce dernier cas, les lettres communes au dividende & au diviſeur ſoient en même temps communes à tous les termes ſéparés par les ſignes + & —. C'eſt ainſi qu'ayant $a^5 + 4a^4b - 5a^2b^3$ à diviſer par $a^3 - 5a^2b$, on réduira le quotient $\frac{a^5+4a^4b-5a^2b^3}{a^3-5a^2b}$, à la quantité $\frac{a^3+4a^2b-5b^3}{a-5b}$ en ſupprimant a^2 qui eſt facteur commun de tous les termes du dividende & du diviſeur.

36. Si le dividende & le diviſeur ſont complexes, on ne peut donner de règles générales pour reconnoître, par l'inſpection ſeule, ſi la diviſion peut ou ne peut pas être faite exactement. Il faut, pour s'en

assurer & trouver en même temps le quotient, faire l'opération que nous allons enseigner.

1°. Disposer, sur une même ligne, le dividende & le diviseur, & *ordonner* leurs termes par rapport à une même lettre commune à l'un & à l'autre, c'est-à-dire, écrire, par ordre de grandeur, les termes où cette lettre a des exposans consécutivement plus petits.

2°. Cette disposition faite, on sépare le dividende, du diviseur, par un trait, & on procède à la division en prenant seulement le premier terme du dividende que l'on divise, suivant les règles données ci-dessus (30, 31 & 34), par le premier terme du diviseur, & l'on écrit le quotient sous le diviseur.

3°. On multiplie successivement tous les termes du diviseur, par le quotient qu'on vient de trouver, & on porte les produits sous le dividende, en observant de changer leur signe.

4°. On souligne le tout, & après avoir fait la réduction des termes semblables, on écrit le reste au-dessous pour commencer une seconde division de la même manière; en prenant pour premier terme, celui des termes restans qui a le plus fort exposant.

Sur quoi il faut remarquer qu'ici, comme dans la multiplication, on doit avoir égard aux signes du

terme du dividende & du terme du diviſeur que l'on emploie : la règle eſt la même que pour la multiplication, c'eſt-à-dire, que......

Si le dividende & le diviſeur ont le même ſigne, le quotient aura le ſigne +.

Si, au contraire, ils ont différens ſignes, le quotient aura le ſigne —.

Cette règle pour les ſignes eſt fondée ſur ce que (*Arith.* 74) le quotient multiplié par le diviſeur, doit reproduire le dividende. Il faut donc que le quotient ait des ſignes tels qu'en le multipliant par le diviſeur, on reproduiſe le dividende avec les mêmes ſignes ; or cette condition entraîne néceſſairement la règle que nous venons de donner.

Pour procéder avec ordre, on commencera par les ſignes, puis on diviſera le coëfficient, enfin les lettres.

EXEMPLE.

On propoſe de diviſer $aa - bb$ par $b + a$.

J'ordonne le dividende & le diviſeur par rapport à l'une ou à l'autre des deux lettres a & b, par rapport à a, par exemple ; & je les écris comme on le voit ici :

Divid.	$aa - bb$	$a + b$ Diviſeur.
	$-aa - ab$	$a - b$ Quotient.
Reſte.	$-ab - bb$	
	$+ab + bb$	
Reſte.	0	

Le ſigne du premier terme aa du dividende, étant le même que celui de a premier terme du diviſeur, je dois mettre $+$ au quotient; mais comme c'eſt le premier terme, je puis omettre le ſigne $+$.

Je diviſe aa par a; j'ai pour quotient a que j'écris ſous le diviſeur.

Je multiplie ſucceſſivement les deux termes a & b du diviſeur, par le premier terme a du quotient, & j'écris les produits aa & ab ſous le dividende, avec le ſigne —, contraire à celui qu'a donné la multiplication, parce que ces produits doivent être retranchés du dividende.

Je fais la réduction en effaçant les deux termes aa & $-aa$ qui ſe détruiſent; il me reſte $-ab$ qui, avec la partie reſtante $-bb$ du dividende, compoſe ce qui me reſte à diviſer.

Je continue la diviſion en prenant $-ab$ pour premier terme de mon nouveau dividende.

Diviſant $-ab$ par a, j'écris — au quotient, parce que les ſignes du dividende & du diviſeur ſont différens; quant aux lettres, je trouve b pour quotient, & je l'écris à la ſuite du premier quotient.

Je multiplie les deux termes a & b du diviſeur, par le terme $-b$ du quotient; les deux produits ſont $-ab$ & $-bb$; je change leurs ſignes & j'écris $+ab$, $+bb$ ſous les parties reſtantes du dividende. Je fais la réduction en effaçant les parties ſemblables & de ſigne contraire: comme il ne reſte rien, j'en conclus que le quotient eſt $a-b$.

On auroit pu également ordonner le dividende & le diviſeur par rapport à la lettre b, & alors on auroit eu $-bb+aa$ à diviſer par $b+a$, ce qui en opérant de la même manière, auroit donné $-b+a$ pour quotient, quantité qui eſt la même que $a-b$.

Avant que de paſſer à l'exemple qui ſuit, il eſt à propos que les Commençans s'exerçent ſur les exemples de la Table ci-jointe, *page 33*.

37. Si après avoir ordonné le dividende & le diviſeur par rapport à une même lettre, il ſe trouvoit pluſieurs termes dans leſquels cette lettre eût le même expoſant, on diſpoſeroit ceux-ci dans une même colonne verticale, comme on le voit dans l'exemple ſuivant; & dans cette diſpoſition, on obſerveroit d'ordonner tous les termes de chaque colonne par rapport à une même autre lettre.

EXEMPLE.

On propoſe de diviſer $19a^2b^2 + 13a^3b - 20a^4 - 10a^3c - 6a^2bc + 2ab^2c - 5ab^3$, par $-3ab - 5a^2 + bb$. J'ordonne le dividende & le diviſeur, par rapport à la lettre a, ce qui me donne $-20a^4 + 13a^3b - 10a^3c + 19a^2b^2 - 6a^2bc + 2ab^2c - 5ab^3$ à diviſer par $-5a^2 - 3ab + bb$; mais comme il y a deux termes affectés de a^3, deux termes affectés de a^2, & deux termes affectés de a, je les diſpoſe comme on le voit ici, en ordonnant dans chaque colonne, par rapport à la lettre b.

$$
\begin{array}{l|rrrr|l}
\text{Divid.} & -20a^4 & +13a^3b & +19a^2b^2 & -5ab^3 & -5a^2-3ab+bb \ \text{Divis.} \\
 & & -10a^3c & -6a^2bc & +2ab^2c & 4a^2-5ab+2ac \ \text{Quot.} \\
 & +20a^4 & +12a^3b & -4a^2b^2 & & \\
\hline
\text{Reste} \ldots & & +25a^3b & +15a^2b^2 & -5ab^3 & \\
 & & -10a^3c & -6a^2bc & +2ab^2c & \\
 & & -25a^3b & -15a^2b^2 & +5ab^3 & \\
\hline
\text{Reste} \ldots & & -10a^3c & -6a^2bc & +2ab^2c & \\
 & & +10a^3c & +6a^2bc & -2ab^2c & \\
\hline
\text{Reste} \ldots & & & & 0 &
\end{array}
$$

Je procède enſuite à l'opération, en diviſant $-20a^4$ premier terme du dividende, par $-5a^2$ premier terme du diviſeur. Cette opération faite ſuivant les règles ci-deſſus, me donne pour quotient $+4a^2$ ou ſimplement $4a^2$, parce que c'eſt le premier terme; je l'écris au quotient.

Je multiplie les trois termes du diviſeur, ſucceſſivement par $4a^2$, & changeant les ſignes à meſure que je trouve ces produits, je les écris ſous le dividende, ce qui me donne $20a^4 + 12a^3b - 4a^2b^2$ dont je fais la réduction avec les termes du dividende, & j'ai pour reſte & pour nouveau dividende $+25a^3b - 10a^3c + 15a^2b^2 - 6a^2bc - 5ab^3 + 2ab^2c$.

Je continue la diviſion en prenant $+25a^3b$ pour dividende, & je trouve pour quotient $-5ab$; j'écris ce quotient; je multiplie, par cette même quantité, les trois termes du diviſeur; & changeant les ſignes à meſure que je les trouve, j'écris les produits ſous mon nouveau dividende; j'ai $-25a^3b - 15a^2b^2 + 5ab^3$, dont faiſant la réduction avec les termes de ce même nouveau dividende; j'ai pour reſte & pour troiſième dividende $-10a^3c - 6a^2bc + 2ab^2c$.

Je paſſe à une troiſième diviſion en prenant $-10a^3c$ pour dividende : je trouve $+2ac$ pour quotient; je fais la multiplication, le changement de ſignes, & la réduction comme ci-devant, & il ne me reſte rien; ainſi le quotient eſt $4a^2 - 5ab + 2ac$.

38. Il arrive ſouvent qu'une quantité réſultant de pluſieurs opérations différentes, peut être miſe ſous la forme d'un produit ou réſultat de multiplication : lorſque

Exempl

$$\begin{array}{r} a + b \\ a - b \\ \hline a^2 + ab \\ - ab - b^2 \\ \hline a^2 - b^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a + \\ a + \\ \hline a^2 + \\ + ab + \\ \hline a^2 + \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\ \hline a^6 + 3a^5b + 3a^4b^2 + a^3b^3 \\ -3a^5b - 9a^4b^2 - 9a^3b^3 - 3a^2b^4 \\ +3a^4b^2 + 9a^3b^3 + 9a^2b^4 + 3ab^5 \\ - a^3b^3 - 3a^2b^4 - 3ab^5 - b^6 \\ \hline a^6 - 3a^4b^2 + 3a^2b^4 - b^6 \end{array} \; *$$

Exen

$$\begin{array}{r|l} a^3 - b^3 & a - b \\ \cline{2-2} -a^3 + a^2b & a^2 + ab + b^2 \\ \hline + a^2b - b^3 & \\ - a^2b + ab^2 & \\ \hline + ab^2 - b^3 & \\ - ab^2 + b^3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a^4 + 2aabb + b^4 - c \\ - a^4 - aabb - aacc \\ \hline + aabb - aacc + \\ - aabb - b^4 - b \\ \hline - aacc - b \\ + aacc + b \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 20a^5 - 41a^4b + 50a^3b^2 - 45 \\ -20a^5 + 16a^4b - 20a^3b^2 + 12 \\ \hline -25a^4b + 30a^3b^2 - 33 \\ +25a^4b - 20a^3b^2 + 25 \\ \hline +10a^3b^2 - 8 \\ -10a^3b^2 + 8 \\ \hline \end{array}$$

lorsque cela arrive, il est très-souvent utile de lui donner cette forme, en indiquant la multiplication entre ses facteurs. Quoique la méthode générale pour découvrir ces facteurs dépende de connaissances que nous ne donnerons que par la suite, néanmoins nous observerons que lorsqu'on s'est un peu familiarisé avec la multiplication & la division, on les apperçoit, dans beaucoup de cas, avec facilité. Par exemple, si on avoit à ajouter $5ab - 3bc + a^2$, avec $3ab + 3bc - 2a^2$, on auroit $8ab - a^2$ qui, à cause de la lettre a qui est facteur commun des deux termes $8ab$ & a^2, peut être considéré comme étant venu de la multiplication de $8b - a$ par a, & peut être représenté par $(8b - a) \times a$. Il est utile de s'exercer à ces sortes de décompositions.

De la manière de trouver le plus grand commun diviseur de deux quantités littérales.

39. La méthode pour trouver le plus grand commun diviseur de deux quantités littérales, est analogue à celle que nous avons donnée pour les nombres (*Arith.* 95). Il faut, après avoir ordonné les deux quantités par rapport à une même lettre, diviser celle où cette lettre a le plus grand exposant, par la seconde, & continuer la division jusqu'à ce que cet exposant y soit devenu moindre que dans la seconde, ou tout au plus égal. On divise ensuite la seconde, par le reste de cette division, & avec les mêmes conditions. On divise après cela, le premier reste par le

fecond, & l'on continue de divifer le refte précédent par le nouveau, jufqu'à ce qu'on foit arrivé à une divifion exacte : alors le dernier divifeur qu'on aura employé, eft le plus grand commun divifeur cherché. La démonftration eft fondée fur les mêmes principes que celle que nous avons donnée en Arithmétique, *page 82*.

Avant de mettre cette règle en pratique, nous ferons une obfervation qui peut en faciliter l'ufage; cette obfervation eft, qu'on ne change rien au plus grand commun divifeur des deux quantités, lorfqu'on multiplie ou lorfqu'on divife l'une des deux par une quantité qui n'eft point divifeur de l'autre, & qui n'a aucun commun divifeur avec cette autre. Par exemple ab & ac ont pour commun divifeur a, fi je multiplie ab par d, il deviendra abd qui n'a avec ac d'autre commun divifeur que a; c'eft-à-dire, le même qui étoit entre ab & ac.

Il n'en feroit pas de même, fi je multipliois ab par un nombre qui fût divifeur de ac, ou qui eût un facteur commun avec ac; par exemple, fi je multipliois ab par c, il deviendroit abc, dont le divifeur commun avec ac eft ac lui-même. Pareillement, fi je multipliois ab par cd qui a un facteur commun avec ac, j'aurois $abcd$ dont le divifeur commun avec ac eft ac.

40. Concluons de-là, 1°. que fi en cherchant le plus grand commun divifeur de deux quantités, on s'apperçoit dans le cours des divifions que l'on fera fucceffivement, que le dividende ou le divifeur ait un facteur ou divifeur qui ne foit point facteur de l'autre, on pourra fupprimer ce facteur.

2°. Qu'on pourra multiplier l'une des deux quantités,

par tel nombre qu'on voudra, pourvu que ce nombre ne soit point diviseur de l'autre quantité, & n'ait aucun facteur commun avec elle.

Appliquons maintenant la règle & les remarques que nous venons de faire.

Supposons qu'on demande le plus grand commun diviseur de $aa - 3ab + 2bb$ & $aa - ab - 2bb$. Je divise la première par la seconde : j'ai 1 pour quotient, & $-2ab + 4bb$ pour reste. Je vais donc diviser $aa - ab - 2bb$, par le reste $-2ab + 4bb$; mais comme celui-ci a pour facteur $2b$ qui n'est point facteur du nouveau dividende, je supprime ce facteur $2b$, & je me contente de chercher le commun diviseur de $aa - ab - 2bb$ & $-a + 2b$, c'est-à-dire, de diviser $aa - ab - 2bb$ par $-a + 2b$; la division se fait exactement. J'en conclus que $-a + 2b$ est le plus grand commun diviseur des deux quantités proposées.

Proposons-nous pour second exemple, de trouver le plus grand commun diviseur des deux quantités $5a^3 - 18a^2b + 11ab^2 - 6b^3$ & $7a^2 - 23ab + 6b^2$. Il faudroit donc diviser la première de ces deux quantités, par la seconde; mais comme 5 ne peut être divisé exactement par 7, je multiplierai la première par 7, qui n'étant point facteur de tous les termes de la seconde, ne peut rien changer au commun diviseur. J'aurai donc $35a^3 - 126a^2b + 77ab^2 - 42b^3$ à diviser par $7a^2 - 23ab + 6b^2$. En faisant la division, j'aurai $5a$ pour quotient, & pour reste $-11a^2b + 47ab^2 - 42b^3$. Comme l'exposant de a dans celui-ci est encore égal à celui de a dans le diviseur, je puis continuer la division; mais j'observe qu'il faudra encore, par la même raison que ci-dessus, multiplier par 7 : d'ailleurs

je remarque que je puis ôter b dans tous les termes de $-11a^2b + 47ab^2 - 42b^3$, parce qu'il n'est point facteur commun de tous les termes du diviseur $7a^2 - 23ab + 6b^2$; j'aurai donc, d'après ces observations, $-77a^2 + 329ab - 294b^2$ à diviser par $7a^2 - 23ab + 6b^2$; faisant la division, j'ai -11 pour quotient, & $76ab - 228b^2$ pour reste. Je vais donc diviser $7a^2 - 23ab + 6b^2$, qui m'a servi de diviseur jusqu'ici, par le reste $76ab - 228b^2$, ou plutôt par $76a - 228b$. Pour que la division pût se faire, il faudroit multiplier la première de ces deux quantités par 76; mais avant de faire cette multiplication, il faut savoir si 76 n'est pas facteur de toute la quantité $76a - 228b$, ou s'il n'a pas quelqu'un de ses facteurs qui en soit facteur commun. Or je remarque que 76 est 3 fois dans $228b$; & comme il n'est pas facteur de $7a^2 - 23ab + 6b^2$, je supprime dans le diviseur $76a - 228b$, le facteur 76, & j'ai $7a^2 - 23ab + 6b^2$ à diviser par $a - 3b$ seulement; la division faite, il ne reste rien; d'où je conclus que le commun diviseur des deux quantités proposées, est $a - 3b$.

Des Fractions littérales.

41. Les fractions littérales se calculent suivant les mêmes règles que les fractions numériques, mais en appliquant en même temps les règles que nous avons données ci-dessus concernant l'addition, la soustraction, la multiplication & la division. Comme cette application est facile, nous la ferons très-sommairement.

42. La fraction $\frac{a}{b}$ peut être transformée, sans

changer de valeur, en $\frac{ac}{bc}$, ou $\frac{aa}{ab}$, ou $\frac{aa+ab}{ab+bb}$, & ainſi de ſuite.

En effet, ces dernières ne ſont autre choſe que la première dont on a multiplié les deux termes, par c dans le premier cas, par a dans le ſecond, & par $a+b$ dans le troiſième, ce qui (*Arith.* 88) n'en change pas la valeur.

43. La fraction $\frac{aac}{abc}$ eſt la même choſe que $\frac{a}{b}$; la fraction $\frac{6a^3+3a^2b}{12a^3+9a^2c}$ eſt la même que $\frac{2a+b}{4a+3c}$. Cela eſt évident (*Arith.* 89), en diviſant les deux termes de la troiſième par ac, & les deux termes de la troiſième, par $3a^2$. Au reſte cette réduction des fractions à leur plus ſimple expreſſion eſt compriſe dans ce qui a été dit (33).

44. La règle générale & la plus sûre pour réduire une fraction quelconque à ſes moindres termes, eſt de diviſer les deux termes par leur plus grand commun diviſeur que l'on trouve par ce qui a été dit (39).

45. Pour réduire à une ſeule fraction, une quantité compoſée d'un entier & d'une fraction, il faut, comme en Arithmétique, multiplier l'entier par le dénominateur de la fraction qui l'accompagne. Par

exemple, $a + \frac{bd}{c}$, peut être changé en $\frac{ac + bd}{c}$. De même, $a + \frac{cd - ab}{b - d}$, se réduit à $\frac{ab - ad + cd - ab}{b - d}$, en multipliant l'entier a par le dénominateur $b - d$.

Lorsqu'à la suite de ces opérations, il se trouve des termes semblables, il ne faut pas oublier de les réduire ; ainsi dans le dernier exemple, la quantité $a + \frac{cd - ab}{b - d}$ a été changée en $\frac{ab - ad + cd - ab}{b - d}$ qui se réduit à $\frac{-ad + cd}{b - d}$ ou $\frac{cd - ad}{b - d}$, en effaçant les deux termes ab & $-ab$ qui se détruisent.

46. Pour tirer les entiers qu'une fraction littérale peut renfermer, cela se réduit comme en Arithmétique, à diviser le numérateur, par le dénominateur, autant qu'il est possible, & en suivant les règles données ci-dessus pour la division ; ainsi la quantité $\frac{3ab + ac + cd}{a}$, peut être réduite à $3b + c + \frac{cd}{a}$; pareillement la quantité $\frac{a^2 + 4ab + 4bb + cc}{a + 2b}$, se réduit à $a + 2b + \frac{cc}{a + 2b}$, en faisant la division par $a + 2b$.

47. Pour réduire plusieurs fractions littérales, au même dénominateur, la règle est la même qu'en Arithmétique : ainsi pour réduire à un même dénominateur, les trois fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, je multiplie les deux termes a & b de la première, par

df qui est le produit des dénominateurs des deux autres fractions, & j'ai $\frac{adf}{bdf}$. Je multiplie de même les deux termes c & d de la seconde, par bf produit des deux autres dénominateurs, & j'ai $\frac{bcf}{bdf}$; enfin je multiplie les deux termes e & f de la dernière, par bd produit des dénominateurs des deux autres, & j'ai $\frac{bde}{bdf}$, ensorte que les trois fractions, réduites au même dénominateur, deviennent $\frac{adf}{bdf}$, $\frac{bcf}{bdf}$, $\frac{bde}{bdf}$.

On se conduiroit de la même manière, si les numérateurs ou les dénominateurs, ou tous les deux étoient complexes, mais en observant les règles de la multiplication des nombres complexes. C'est ainsi qu'on trouvera que les deux fractions $\frac{b+c}{a+b}$ & $\frac{a-2c}{a-b}$, réduites au même dénominateur, deviennent $\frac{ab+ac-bb-bc}{aa-bb}$, & $\frac{aa-2ac+ab-2bc}{aa-bb}$, en multipliant les deux termes de la première par $a-b$, & les deux termes de la seconde par $a+b$.

48. Quand les dénominateurs ont un diviseur ou facteur commun, on peut réduire les fractions à un même dénominateur, plus simplement que par la règle générale: par exemple, si j'avois les deux fractions $\frac{a}{bc}$, $\frac{d}{bf}$; je vois que les deux dénominateurs seroient les mêmes si f étoit facteur du premier, & c

facteur du second; je multiplie donc les deux termes de la première fraction par f, & les deux termes de la seconde, par c; ce qui me donne $\frac{af}{bcf}$ & $\frac{cd}{bcf}$ plus simples que $\frac{abf}{bbcf}$ & $\frac{bcd}{bbcf}$ que j'aurois eues en suivant la règle générale. Si j'avois les trois fractions $\frac{a}{bc}$, $\frac{d}{bf}$, $\frac{e}{cg}$; je vois que si fg étoit facteur du dénominateur de la première; cg, de celui de la seconde; & bf, de celui de la troisième, les trois fractions auroient le même dénominateur; je multiplie donc les deux termes de la première, par fg; les deux termes de la seconde, par cg; & les deux termes de la troisième par bf; & j'ai $\frac{afg}{bcfg}$, $\frac{dcg}{bcfg}$, $\frac{bef}{bcfg}$.

On peut appliquer cela aux nombres, en les décomposant en leurs facteurs. Par exemple $\frac{5}{12}$ & $\frac{3}{16}$ sont la même chose que $\frac{5}{4\times3}$ & $\frac{3}{4\times4}$; je multiplie donc les deux termes de la première par 4, & les deux termes de la seconde par 3, & j'ai $\frac{20}{48}$ & $\frac{9}{48}$.

49. A l'égard de l'addition & de la soustraction, lorsqu'on a réduit les fractions au même dénominateur, il ne s'agit plus que de faire l'addition ou la soustraction des numérateurs. Ainsi les deux fractions $\frac{b+c}{a+b}$ & $\frac{a-2c}{a-b}$, réduites au même dénominateur, ont donné ci-dessus $\frac{ab+ac-bb-bc}{aa-bb}$ &

$\frac{aa - 2ac + ab - 2bc}{aa - bb}$; si donc on veut ajouter, on aura $\frac{ab + ac - bb - bc + aa - 2ac + ab - 2bc}{aa - bb}$ qui se réduit à $\frac{2ab - ac - bb - 3bc + aa}{aa - bb}$. Au contraire, si l'on veut retrancher la seconde de la première, on aura $\frac{ab + ac - bb - bc - aa + 2ac - ab + 2bc}{aa - bb}$ qui se réduit à $\frac{3ac - bb + bc - aa}{aa - bb}$.

50. Remarquons en passant que, pour retrancher la seconde fraction, nous avons changé les signes du numérateur seulement : Si l'on changeoit les signes du numérateur & du dénominateur en même temps, on ne changeroit point la fraction, & par conséquent, au lieu de la retrancher, on l'ajouteroit; en effet $\frac{a}{b}$ est la même chose que $\frac{-a}{-b}$ selon la règle qui a été donnée (36).

51. Pour multiplier $\frac{a}{b}$, par $\frac{c}{d}$; on écrira $\frac{ac}{bd}$, en multipliant numérateur par numérateur, & dénominateur par dénominateur, conformément aux régles de l'Arithmétique; de même $\frac{1}{2}a \times \frac{1}{2}b$ donnera $\frac{1}{4}ab$.

Si l'on avoit $\frac{a}{b}$ à multiplier par c, on pourroit considérer c, comme étant $\frac{c}{1}$, ce qui ramène cette multiplication au cas précédent, & donne $\frac{ac}{b}$; mais on voit que cela se réduit à multiplier le

numérateur par l'entier c; nous prendrons donc pour règle dorénavant, celle-ci, *pour multiplier une fraction par un entier, ou un entier par une fraction, il faut multiplier le numérateur par l'entier, & conserver le même dénominateur.*

Si le numérateur & le dénominateur étoient complexes, on leur appliqueroit la règle de la multiplication des nombres complexes.

52. Pour diviser $\frac{a}{b}$, par $\frac{c}{d}$; l'opération (*Arith.* 109) se réduit à multiplier $\frac{a}{b}$ par $\frac{d}{c}$, ce qui s'exécute par la règle précédente, & donne $\frac{ad}{bc}$. Et pour diviser $\frac{a+b}{c+d}$, par $\frac{c+d}{a-b}$, cela se réduit à multiplier $\frac{a+b}{c+d}$ par $\frac{a-b}{c+d}$, ce qui donne $\frac{(a+b)(a-b)}{(c+d)(c+d)}$ ou $\frac{(a+b)(a-b)}{(c+d)^2}$ ou, en faisant la multiplication indiquée dans le numérateur, $\frac{aa-bb}{(c+d)^2}$.

Enfin, si l'on avoit $\frac{a}{b}$ à diviser par c, on pourroit considérer c, comme étant $\frac{c}{1}$, ce qui rameneroit au cas précédent, & réduiroit à mutiplier $\frac{a}{b}$ par $\frac{1}{c}$, ce qui donne bc; d'où l'on voit que *pour diviser une fraction par un entier, il faut multiplier le dénominateur par l'entier, & conserver le numérateur.*

Des Équations.

53. Pour marquer que deux quantités ſont égales, on les ſépare l'une de l'autre par ce ſigne $=$, qui ſe prononce par le mot *égale*, ou par les mots *eſt égal à*; ainſi cette expreſſion $a = b$, ſe prononceroit en diſant a égale b, ou a eſt égal à b.

L'aſſemblage de deux ou de pluſieurs quantités ſéparées ainſi par le ſigne $=$, eſt ce qu'on appelle une *Équation*. La totalité des quantités qui ſont à la gauche du ſigne $=$, forme ce qu'on appelle le *premier membre* de l'équation; & la totalité de celles qui ſont à la droite de ce même ſigne, forme le *ſecond membre*. Dans l'équation $4x - 3 = 2x + 7$, $4x - 3$ forme le premier membre, & $2x + 7$ forme le ſecond. Les équations ſont d'un très-grand uſage pour la réſolution des queſtions qu'on peut propoſer ſur les quantités.

Toute queſtion qui peut être réſolue par l'Algèbre, renferme toujours dans ſon énoncé, ſoit explicitement, ſoit implicitement, un certain nombre de conditions qui ſont autant de moyens de ſaiſir les rapports des quantités inconnues, aux quantités connues dont celles-là dépendent. Ces rapports peuvent toujours, ainſi qu'on le verra par la ſuite, être exprimés par des équations dans leſquelles les

quantités inconnues & les quantités connues se trouvent combinées les unes avec les autres, & cela d'une manière plus ou moins composée, selon que la question est plus ou moins difficile.

Ainsi pour résoudre, par Algèbre, les questions qu'on peut proposer sur les quantités, il faut trois choses.

1°. Saisir dans l'énoncé ou dans la nature de la question, les rapports qu'il y a entre les quantités connues & les quantités inconnues. C'est une faculté que l'esprit acquiert, comme beaucoup d'autres, par l'usage; mais il n'y a point de règles générales à donner là-dessus.

2°. Exprimer chacun de ces rapports, par une équation. Cette condition peut être réduite à une seule règle, que nous exposerons par la suite; mais l'application en est plus ou moins facile selon la nature des questions, la capacité & l'exercice que peut avoir celui qui entreprend de résoudre.

3°. Résoudre cette équation, ou ces équations, c'est-à-dire, en déduire la valeur des quantités inconnues. Ce dernier point est susceptible d'un nombre déterminé de règles: c'est par lui que nous allons commencer.

Comme les questions qu'on peut avoir à résoudre,

peuvent conduire à des équations plus ou moins composées, on a partagé celles-ci en plusieurs classes ou degrés que l'on distingue par l'exposant de la quantité ou des quantités inconnues qui s'y trouvent : nous ferons connoître ces équations à mesure que nous avancerons : celles dont nous allons nous occuper d'abord, sont les *équations du premier degré.* On nomme ainsi les équations dans lesquelles les inconnues ne sont multipliées ni par elles-mêmes, ni entre elles.

Des Équations du premier degré, à une seule inconnue.

54. Résoudre une équation, c'est la réduire à une autre, dans laquelle l'inconnue, ou la lettre qui la représente, se trouve seule dans un membre, & où il n'y ait plus que des quantités connues dans l'autre membre.

Par exemple, si l'on proposoit cette question, *Trouver un nombre dont le quadruple ajouté à* 3, *donne autant que son triple ajouté à* 12. En représentant ce nombre par x, son quadruple seroit $4x$, lequel ajouté à 3 fait $4x + 3$; d'un autre côté le triple de ce même nombre x est $3x$, lequel ajouté à 12 fait $3x + 12$; puis donc que $4x + 3$ doit donner autant que $3x + 12$, il faut que le nombre x soit

tel que l'on ait $4x + 3 = 3x + 12$; c'eſt-là l'équation qu'il s'agit de réſoudre, pour trouver le nombre demandé.

Or il eſt évident que puiſque les deux quantités ſéparées par le ſigne $=$, ſont égales, elles le ſeront encore, ſi l'on retranche de chacune $3x$, ce qui réduit l'équation à $x + 3 = 12$; enfin ces deux-ci ſeront encore égales, ſi de chacune on retranche le même nombre 3, ce qui donne $x = 9$, & réſout la queſtion; car il eſt évident que x eſt connu, puiſqu'il eſt égal à une quantité connue 9.

L'objet que nous nous propoſons ici eſt de donner des règles pour ramener l'équation, dans tous les cas, à avoir ainſi l'inconnue ſeule dans un membre, & n'avoir que des quantités connues dans l'autre membre. Pour une queſtion auſſi ſimple que celle que nous venons de prendre pour exemple, l'uſage des équations ſeroit ſans doute ſuperflu; mais toutes les queſtions ne ſont pas de cette facilité; & il ne s'agit encore que de faire entendre, comment l'équation eſt réſolue, lorſque l'inconnue eſt ſeule dans un membre, & qu'il n'y a plus que des quantités connues dans l'autre.

Les règles pour réſoudre les équations dont il s'agit ici, c'eſt-à-dire, pour les réduire à avoir l'inconnue ſeule dans un membre, ſe réduiſent à

trois qui ſont relatives aux trois différentes manières dont l'inconnue peut ſe trouver mêlée ou engagée avec des quantités connues.

Dorénavant nous repréſenterons les quantités inconnues par quelques-unes des dernières lettres x, y, z de l'Alphabet, pour les diſtinguer des quantités connues que nous repréſenterons, ou par des nombres, ou par les premières lettres de l'Alphabet.

55. L'inconnue peut ſe trouver mêlée avec des quantités connues, en trois manières ; 1°. par addition ou ſouſtraction, comme dans l'équation $x + 3 = 5 - x$. 2°. Par addition, ſouſtraction & multiplication, comme dans l'équation $4x - 6 = 2x + 16$. 3°. Enfin par addition, ſouſtraction, multiplication & diviſion, comme dans l'équation $\frac{9}{5}x - 4 = \frac{2}{3}x + 17$; ou par ces deux dernières opérations ſeulement, ou par la dernière ſeulement.

Voici les règles qu'il faut ſuivre pour dégager l'inconnue dans ces différens cas.

56. *Pour faire paſſer un terme quelconque d'une équation, d'un membre de cette équation dans l'autre ; il faut effacer ce terme, & l'écrire dans l'autre membre avec un ſigne contraire à celui qu'il a dans le membre où il eſt.* Sur quoi il faut ſe rappeler qu'un terme qui n'a pas de ſigne, eſt cenſé avoir le ſigne +.

Par exemple, dans l'équation $4x + 3 = 3x + 12$, ſi je veux faire paſſer le terme $+ 3$ dans le ſecond membre, j'écris $4x = 3x + 12 - 3$, où l'on voit que le terme 3 n'eſt plus dans le premier membre; mais il eſt dans le ſecond avec le ſigne $-$, contraire au ſigne $+$ qu'il avoit dans le premier.

Cette équation réduite, revient à $4x = 3x + 9$; ſi l'on veut maintenant faire paſſer le terme $3x$, dans le premier membre, on écrira $4x - 3x = 9$, qui en réduiſant, devient $x = 9$.

Pareillement, ſi dans l'équation $5x - 7 = 21 - 4x$, je veux faire paſſer le terme -7 dans le ſecond membre, j'écrirai $5x = 21 - 4x + 7$, qui ſe réduit à $5x = 28 - 4x$; ſi je veux enſuite faire paſſer $4x$, j'écrirai $5x + 4x = 28$, ou, en réduiſant, $9x = 28$. Nous verrons, dans quelques momens, comment s'achève la réſolution de cette équation.

La raiſon de cette règle eſt bien facile à ſaiſir. Puiſque les quantités qui compoſent le premier membre, ſont, enſemble, égales à la totalité de celles qui compoſent le ſecond, il eſt évident qu'on ne trouble point cette égalité, ſi ayant ajouté ou ôté à l'un des membres un terme quelconque, on ajoute ou l'on ôte à l'autre, ce même terme; or, lorſqu'on efface un terme qui a le ſigne $+$, c'eſt diminuer le membre où il ſe trouve; il faut donc diminuer l'autre de pareille quantité, c'eſt-à-dire, y écrire ce terme avec le ſigne $-$. Au contraire, lorſqu'on efface un terme qui a le ſigne $-$, il eſt évident qu'on augmente le membre où il ſe trouve; il

il faut donc augmenter l'autre, de pareille quantité, c'est-à-dire, y écrire ce terme avec le signe +.

57. On voit donc que par cette règle on peut faire passer, à la fois, dans un même membre, tous les termes affectés de l'inconnue, & toutes les quantités connues dans l'autre. On choisira d'abord dans quel membre on veut avoir les termes affectés de l'inconnue; cela est indifférent : je suppose que ce soit dans le premier. On écrira de nouveau l'équation, en observant de conserver aux termes affectés de l'inconnue, & qui étoient dans le premier membre, les signes qu'ils avoient; on écrira, à la suite de ceux-là, les termes affectés de l'inconnue, qui se trouvent dans l'autre membre, mais en observant de changer leur signe: à la suite de tous ces termes, on écrira le signe =, & l'on formera le second membre, en écrivant les quantités connues qui composoient d'abord le second membre, en les écrivant, dis-je, avec les mêmes signes qu'elles avoient, & ensuite les quantités connues qui étoient dans le premier membre, mais en leur donnant des signes contraires à ceux qu'elles avoient. C'est ainsi que l'équation $7x - 8 = 14 - 4x$ devient $7x + 4x = 14 + 8$, ou $11x = 22$. Pareillement l'équation $ax + bc - cx = ac - bx$, devient $ax - cx + bx = ac - bc$.

58. Il peut arriver, par cette transposition, que ce qui reste des x, après la réduction, se trouve avoir le signe —; par exemple, si l'on avoit $3x - 8 = 4x - 12$; en passant tous les x dans le premier membre, on auroit $3x - 4x = -12 + 8$, qui se réduit à $-x = -4$; alors, il n'y a qu'à changer les signes de l'un & de l'autre membre, ce qui, dans le cas présent, donne $+x = +4$ ou $x = 4$. En effet, on étoit également maître de transposer les x dans le second membre, ce qui auroit donné $-8 + 12 = 4x - 3x$, qui se réduit à $4 = x$, qui est la même chose que $x = 4$.

59. On peut souvent abréger la réduction de l'équation, lorsqu'elle est numérique, ou lorsqu'étant littérale, elle renferme des quantités semblables. Si ces quantités ont le même signe dans différens membres, on efface l'une, & on diminue l'autre de pareille quantité; au contraire, on les ajoute, lorsqu'elles ont différens signes. Par exemple, dans l'équation $6b - 4a + 2x = 5a + 3x$, j'efface $2x$ dans le premier membre, & j'écris seulement x dans le second; j'efface $5a$ dans le second, & j'augmente $4a$ de $5a$, ce qui me donne tout de suite $6b - 9a = x$. On voit donc que s'il se trouvoit de part & d'autre, des termes parfaitement égaux & de même signe, on pourroit les supprimer tout de suite; c'est ainsi que l'équation

$5a + 2b = 5a + x$, se réduit tout de suite à $2b = x$.

60. Lorsqu'on a passé dans un membre, tous les termes affectés de l'inconnue, & toutes les quantités connues dans l'autre membre; s'il n'y a point de fractions dans l'équation, il ne s'agit plus que d'exécuter la règle suivante, pour avoir la valeur de l'inconnue. *Écrivez l'inconnue seule dans un membre, & donnez pour diviseur au second membre, la quantité qui multiplioit l'inconnue dans le premier.*

Par exemple, dans l'équation $7x - 8 = 14 - 4x$ que nous avons traitée ci-dessus, nous avons eu, par la transposition & la réduction, $11x = 22$; pour avoir x, je n'ai autre chose à faire qu'à écrire $x = \frac{22}{11}$, qui se réduit à $x = 2$; c'est-à-dire, écrire x seul dans le premier membre, & faire servir son multiplicateur 11, de diviseur au second membre 22. En effet, lorsqu'au lieu de $11x$, j'écris seulement x, je n'écris que la onzième partie du premier membre; il faut donc, pour conserver l'égalité, n'écrire que la onzième partie du second membre, c'est-à-dire, diviser le second membre par 11.

Pareillement, si l'on proposoit l'équation $12x - 15 = 4x + 25$; après avoir passé (56) tous les x d'un côté, & les quantités connues de l'autre, on aura $12x - 4x = 25 + 15$ ou, en réduisant, $8x = 40$; maintenant pour avoir x, j'écris $x = \frac{40}{8}$, qui se réduit à $x = 5$. Car, lorsqu'au lieu de $8x$ j'écris x seulement, je n'écris que la huitième partie du premier membre; je dois donc,

pour maintenir l'égalité, n'écrire que la huitième partie du second membre, c'est-à-dire, n'écrire que $\frac{40}{8}$.

Si les quantités connues qui multiplient x, au lieu d'être des nombres, étoient représentées par des lettres, la règle ne feroit pas différente pour cela : ainsi dans l'équation $ax = bc$, il n'y a autre chose à faire, pour avoir x, que d'écrire $x = \frac{bc}{a}$.

Si après la transposition faite, il y a plusieurs termes affectés de l'inconnue, la règle est encore la même ; ainsi, dans l'équation $ax + bc - cx = ac - bx$, que nous avons eue ci-dessus, on a, après la transposition, $ax - cx + bx = ac - bc$; pour avoir x, il ne s'agit plus que d'écrire $x = \frac{ac - bc}{a - c + b}$; c'est-à-dire, écrire x seul dans un membre, & donner pour diviseur au second, la quantité qui multiplioit x dans le premier, laquelle est ici $a - c + b$, puisque la quantité $ax - cx + bx$ est x multiplié par la totalité des trois quantités $a - c + b$.

61. On voit donc que lorsqu'après la transposition, il y a plusieurs termes affectés de x, on doit pour avoir la valeur de x, diviser le second membre par la totalité des quantités qui affectent x dans le premier, en prenant ces quantités avec leurs signes tels qu'ils sont. Par exemple, dans l'équation $ax = bc - 2x$, on a, par la transposition, $ax + 2x = bc$;

& en appliquant la règle actuelle ou la division, on aura $x = \frac{bc}{a+2}$. De même, l'équation $x - ab = bc - ax$, donne par la transposition $x + ax = bc + ab$, & par conséquent $x = \frac{bc+ab}{1+a}$; car il ne faut pas oublier ici (5) que le multiplicateur de x dans le premier terme de $x + ax$, est 1; ensorte que dans $x + ax$, x est multiplié par $1 + a$; en effet dans $x + ax$, x se trouve une fois de plus que dans ax.

62. S'il se trouvoit quelque quantité qui fût facteur commun de tous les termes de l'équation, on pourroit simplifier, en divisant tous les termes par ce facteur commun : par exemple, dans l'équation $15bb = 27ab + 6bx$, je diviserois par $3b$ qui est facteur commun de tous les termes; & j'aurois $5b = 9a + 2x$, qui, par la transposition, devient $5b - 9a = 2x$, & enfin par la division, donne $\frac{5b-9a}{2} = x$ ou $x = \frac{5b-9a}{2}$.

63. Les règles que nous venons de donner, ont toujours lieu, lors même que les différens termes de l'équation ont des dénominateurs, pourvu que ces dénominateurs ne contiennent pas l'inconnue; mais comme l'application de ces règles est plus facile pour les Commençans, lorsqu'il n'y a pas de

fractions dans l'équation, nous allons ajouter ici une règle pour faire disparoître les dénominateurs.

64. Pour changer une équation dans laquelle il y a des dénominateurs, en une autre dans laquelle il n'y en ait plus, *il faut multiplier chaque terme qui n'a pas de dénominateur, par le produit de tous les dénominateurs; & multiplier le numérateur de chaque fraction, par le produit des dénominateurs des autres fractions seulement.*

Par exemple, si j'avois l'équation $\frac{2x}{3} + 4 = \frac{4x}{5} + 12 - \frac{5x}{7}$; je multiplierois le numérateur $2x$ de la fraction $\frac{2x}{3}$, par 35, produit des deux dénominateurs 5 & 7, ce qui me donneroit $70x$. Je multiplierois le terme 4, qui n'a point de dénominateur, par 105 produit des trois dénominateurs 3, 5, 7, ce qui me donneroit 420. Je multiplierois le numérateur $4x$ de la fraction $\frac{4x}{5}$, par 21, produit des deux dénominateurs 3 & 7, & j'aurois $84x$. Je multiplierois 12, qui n'a pas de dénominateur, par le produit 105 des trois dénominateurs, & j'aurois 1260. Enfin je multiplierois le numérateur $5x$ de la fraction $\frac{5x}{7}$, par 15, produit des deux autres dénominateurs, ce qui me donne $75x$; ensorte que l'équation proposée, est changée en celle-ci $70x + 420 = 84x + 1260 - 75x$, dans laquelle, pour avoir x, il ne s'agit plus que d'appliquer les deux règles précédentes. Par la première (56) on changera cette équation en $70x - 84x + 75x = 1260 -$

420; ou, en réduisant, $61x = 840$; & par la seconde (60), $x = \frac{840}{61}$, qui en faisant la division, se réduit à $x = 13\frac{47}{61}$.

La raison de cette règle est facile à appercevoir, si l'on se rappelle ce qui a été dit (*Arith.* 91) pour réduire plusieurs fractions au même dénominateur. En effet, si dans l'équation proposée $\frac{2x}{3} + 4 = \frac{4x}{5} + 12 - \frac{5x}{7}$, on vouloit réduire au même dénominateur, les trois fractions $\frac{2x}{3}$, $\frac{4x}{5}$, $\frac{5x}{7}$, il faudroit multiplier leurs numérateurs par les mêmes nombres par lesquels notre règle actuelle prescrit de les multiplier, & donner à ces nouveaux numérateurs, pour dénominateur commun, le produit de tous les dénominateurs; ensorte que l'équation proposée seroit changée en cette autre $\frac{70x}{105} + 4 = \frac{84x}{105} + 12 - \frac{75x}{105}$, qui est la même dans le fond, puisque (*Arith.* 88) les nouvelles fractions sont les mêmes que les premières. Maintenant, si nous voulons aussi réduire les entiers en fraction, il faut (*Arith.* 86) multiplier ces entiers par le dénominateur de la fraction qui les accompagne, c'est-à-dire, ici par 105 qui a été formé du produit de tous les dénominateurs qui se trouvent dans l'équation; alors on aura $\frac{70x + 420}{105} = \frac{84x + 1260 - 75x}{105}$;

mais il eſt évident qu'on peut, ſans troubler l'égalité, ſupprimer de part & d'autre le dénominateur commun, puiſque ſi ces deux quantités ſont égales étant diviſées par un même nombre, elles doivent l'être auſſi ſans cette diviſion ; on a donc alors $70x + 420 = 84x + 1260 - 75x$, comme ci-deſſus.

65. Si les différens termes qui compoſent l'équation, ſont tous des quantités littérales, la règle ne ſera pas, pour cela, différente. Il faut ſeulement obſerver les règles de la multiplication des quantités littérales : ainſi dans l'équation $\frac{ax}{b} + b = \frac{cx}{d} + \frac{ab}{c}$, je multiplie le numérateur ax par le produit cd des deux autres dénominateurs, ce qui donne $acdx$. Je multiplie le terme $+b$, par le produit bcd de tous les dénominateurs, & j'ai $+ b^2cd$. Je multiplie cx par bc, & j'ai bc^2x ; enfin je multiplie ab par bd, & j'ai ab^2d; enſorte que l'équation devient $acdx + b^2cd = bc^2x + ab^2d$, laquelle, par tranſpoſition, donne $acdx - bc^2x = ab^2d - b^2cd$, & par diviſion (61) $x = \frac{ab^2d - b^2cd}{acd - bc^2}$.

66. Lorſque les dénominateurs ſont complexes, on peut, pour ſoulager l'eſprit, commencer par indiquer ſeulement les opérations, pour les exécuter enſuite ; ce qui eſt plus facile en les voyant ainſi

indiquées: par exemple, si j'avois $\frac{ax}{a-b}+4b=\frac{cx}{3a+b}$; j'écrirois $ax\times(3a+b)+4b\times(a-b)\times(3a+b)$ $=cx\times(a-b)$; alors faisant les opérations indiquées, j'aurois $3a^2x+abx+12a^2b-8ab^2-4b^3=acx$ $-bcx$; transposant, $3a^2x+abx-acx+bcx$ $=4b^3+8ab^2-12a^2b$; & enfin en divisant (61) $x=\frac{4b^3+8ab^2-12a^2b}{3a^2+ab-ac+bc}$.

Application des principes précédens à la résolution de quelques questions simples.

67. Quoique nous nous soyions proposé de ne traiter avec quelque détail des usages de l'Algèbre, que dans la seconde section, nous croyons néanmoins à propos de préparer à ces usages, en appliquant dès à présent les principes précédens, à quelques questions assez faciles. Cela nous donnera lieu, d'ailleurs, de faire quelques remarques utiles pour la suite.

Les règles que nous venons de donner, sont suffisantes pour résoudre toute question du premier degré, lorsqu'une fois elle est exprimée par une équation. Pour mettre une question en équation, on peut faire usage de la règle suivante; *Représentez la quantité ou les quantités cherchées, chacune par une lettre; & ayant examiné avec attention, l'état de la question, faites, à*

l'aide des signes algébriques, sur ces quantités & sur les quantités connues, les mêmes opérations & les mêmes raisonnemens que vous feriez, si, connoissant les valeurs des inconnues, vous vouliez les vérifier.

Cette règle est générale, & conduira toujours à trouver les équations que la question peut fournir. Mais il est bon d'en diriger l'application par quelques exemples.

Question première : *Un père & un fils ont cent ans à eux deux : le père a 40 ans plus que le fils : on demande quel est l'âge de chacun?*

Avec une attention médiocre, on voit que la question se réduit à celle-ci : Trouver deux quantités qui réunies fassent 100, & dont l'une surpasse l'autre de 40. Or il est facile de voir que dès que l'une de ces quantités sera connue, la seconde le sera aussi, puisque, si la plus grande, par exemple, étoit connue, il ne s'agiroit que d'en ôter 40 pour avoir la plus petite.

Je représente donc la plus grande par x.

Maintenant, si connoissant la valeur de x; je voulois la vérifier, j'en retrancherois 40 pour avoir le plus petit nombre; je réunirois ensuite le plus grand & le plus petit, pour voir s'ils composent 100. Imitons donc ce procédé.

Le plus grand nombre est. x
Le plus petit sera donc. . . . . $x - 40$
Ces deux nombres réunis font. . . . . $2x - 40$
Or, par les conditions de la question, ils doivent faire. 100
Donc. . . . . $2x - 40 = 100$

Il ne s'agit plus, pour avoir x, que d'appliquer les règles données (56 & 60). La première donne $2x = 100 + 40$ ou $2x = 140$, & la seconde $x = \frac{140}{2} = 70$; ayant trouvé le plus grand nombre x, j'en retranche 40 pour avoir le plus petit, & j'ai 30 pour celui-ci. Ainsi les deux âges demandés sont 70 & 30.

En réfléchissant sur la manière dont nous nous sommes conduits pour résoudre cette question, on peut voir que les raisonnemens que nous avons employés, ne sont point dépendans des valeurs particulières des nombres 100 & 40 qui entrent dans cette question; & que si, au lieu de ces nombres, on en eût proposé d'autres, il eût fallu se conduire de même. Ainsi si l'on proposoit la question de cette manière générale : *Deux nombres réunis font une somme connue & représentée par* a; *ces deux nombres diffèrent entre eux d'un nombre connu représenté par* b : *comment trouverois-je ces deux nombres ?*

Ayant représenté le plus grand par. x
Le plus petit sera donc . . . . $x - b$.

Ces deux nombres réunis font. . . . . $2x - b$.

Or selon la question, ils doivent composer le nombre a; il faut donc que $2x - b = a$.

Transposant, on a $2x = a + b$, & divisant $x = \frac{a+b}{2}$ ou $x = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$.

C'est-à-dire, que pour avoir le plus grand, il faut prendre la moitié de a, & y ajouter la moitié de b; ce qui m'apprend que, lorsque je connoîtrai la somme a de deux nombres inconnus, & leur différence b, j'aurai le plus grand de ces deux nombres inconnus en prenant la moitié de la somme, & y ajoutant la moitié de la différence.

Puisque le plus petit des deux nombres est $x - b$, il sera donc $\frac{a}{2} + \frac{b}{2} - b$, ou, en réduisant tout en une seule fraction (45), il sera $\frac{a + b - 2b}{2}$; c'est-à-dire, $\frac{a - b}{2}$ ou $\frac{a}{2} - \frac{b}{2}$; donc pour avoir le plus petit, il faut ôter la moitié de b, de la moitié de a; c'est-à-dire, retrancher la moitié de la différence, de la moitié de la somme.

On voit par-là, comment en représentant d'une manière générale, c'est-à-dire, par des lettres, les quantités connues qui entrent dans ces questions, on parvient à trouver des règles générales pour la résolution de toutes les questions de même espèce. Cette règle que nous venons de trouver, est celle que nous avons donnée (*Géom.* 301).

Souvent des questions paroissent différentes au premier coup d'œil, & cependant après un léger examen, on trouve qu'elles ne diffèrent que par l'énoncé. Par exemple, si l'on proposoit cette question :

Partager un nombre connu & représenté par a, *en deux parties, dont l'une soit moindre ou plus grande que l'autre, d'une quantité connue & représentée par* b. Il est facile de voir que cette question revient au même que la précédente.

Question seconde : *Partager le nombre* 720 *en trois parties, dont la plus grande surpasse la plus petite de* 80, *& dont la moyenne surpasse la plus petite de* 40.

Si l'on me disoit quelle est la plus petite partie, pour la vérifier, j'y ajouterois 40 d'une part, ce qui me donneroit la seconde, & 80 d'une autre part, ce qui donneroit la plus grande; alors réunissant ces trois parties, il faudroit que leur somme formât 720.

Nommons donc cette plus petite partie, x; & en procédant de la même manière, nous dirons :

La plus petite partie eſt. x
Donc la moyenne eſt. . . . . $x + 40$
Et la plus grande. . . . . $x + 80$

Or ces 3 parties réunies font. . . . . $3x + 120$;
D'ailleurs la queſtion exige qu'elles faſſent. 720;
Il faut donc que . . . . $3x + 120 = 720$.

Appliquant les règles ci-deſſus, on aura $3x = 720 - 120$ ou $3x = 600$, & par conſéquent $x = 200$; donc la ſeconde partie eſt 240; & la plus grande, 280; ces trois parties réunies font en effet 720.

Il eſt encore évident, dans cet exemple, que quand les nombres propoſés, au lieu d'être 720, 40 & 80, euſſent été différens, la queſtion auroit toujours pu ſe réſoudre de la même manière; ainſi pour réſoudre toutes les queſtions dans leſquelles il s'agit de partager un nombre connu a en trois parties, telles que l'excès de la plus grande ſur la plus petite ſoit un nombre connu & repréſenté par b, & que l'excès de la moyenne ſur la plus petite ſoit c; en raiſonnant de même, on dira :

Repréſentons la plus petite, par. x
La moyenne ſera. . . . . $x + c$
Et la plus grande. . . . . $x + b$

Ces trois parts réunies font. . . . . $3x + b + c$
Or elles doivent valoir. . . . . a
Il faut donc que. . . . . $3x + b + c = a$
Donc tranſpoſant . . . . $3x = a - b - c$, & diviſant, $x = \frac{a - b - c}{3}$.

C'eſt-à-dire, que pour avoir la plus petite, il faut retrancher du nombre qu'il s'agit de partager, les deux excès, & prendre le tiers du reſte : alors les deux autres ſont faciles à trouver. Ainſi, ſi l'on demande de partager 642 en trois parties dont la moyenne ſurpaſſe la plus petite de 75, & dont la plus grande ſurpaſſe la plus petite de 87; j'ajouterois les deux différences 75 & 87, ce qui me donneroit 162; retranchant 162 de 642, il reſte 480, dont le tiers 160 eſt la plus petite part. Les deux autres ſont donc $160 + 75$ ou 235, & $160 + 87$ ou 247.

Au reſte, les deux queſtions que nous venons de donner pour exemples, n'ont pas beſoin du ſecours de l'Algèbre; mais leur ſimplicité eſt propre à faire voir clairement la manière dont on doit faire uſage du principe que nous avons donné pour mettre une queſtion en équation.

Queſtion troiſième : *Partager un nombre connu, par exemple* 14250, *en trois parties qui ſoient entre elles comme les nombres* 3, 5 & 11; *c'eſt-à-dire, dont la première ſoit à la ſeconde* :: 3 : 5, *& dont la première ſoit à la troiſième* :: 3 : 11.

Si je connoiſſois l'une des parties, la première, par exemple, voici comment je la vérifierois.

Je chercherois par une règle de trois (*Arith.* 194) un nombre qui fût à cette première partie :: 5 : 3; ce ſeroit la ſeconde partie. Je chercherois, de même, un autre nombre qui fût à cette première partie :: 11 : 3; ce ſeroit la troiſième partie; réuniſſant ces trois parties, elles devroient former 14250. Imitons donc ce procédé.

Soit la première part. x

Pour trouver la ſeconde, je calcule le quatrième terme de cette proportion 3 : 5 :: x :

Ce quatrième terme, ou la ſeconde partie, ſera donc $\frac{5x}{3}$.

Pour trouver la troiſième, je calcule le quatrième terme de cette proportion $3 : 11 :: x :$

Ce quatrième terme, ou la troiſième partie, ſera donc $\frac{11x}{3}$.

Ces trois parts réunies ſont $x + \frac{5x}{3} + \frac{11x}{3}$, ou $x + \frac{16x}{3}$;

Mais la queſtion exige qu'elles faſſent 14250; il faut donc que $x + \frac{16x}{3} = 14250$.

Pour avoir la valeur de x, je fais (64) diſparoître le dénominateur 3, & j'ai $3x + 16x = 42750$, ou $19x = 42750$; donc (60) en diviſant par 19, $x = \frac{42750}{19} = 2250$. La ſeconde part qui eſt $\frac{5x}{3}$, ſera donc $\frac{5 \times 2250}{3}$, ou $\frac{11250}{3}$, ou 3750; & la troiſième qui eſt $\frac{11x}{3}$, ſera $\frac{11 \times 2250}{3}$, ou $\frac{24750}{3}$, ou 8250; ces trois parts réunies forment en effet 14250; d'ailleurs les trois nombres 2250, 3750, 8250, ſont entre eux comme les trois nombres 3, 5 & 11, ce qu'il eſt facile de voir en diviſant les trois premiers, par le même nombre 750, ce qui (*Arith.* 170) ne change point leur rapport.

Si le nombre qu'on propoſe de partager, au lieu d'être 14250, étoit tout autre; s'il étoit en général repréſenté par a, & que les nombres proportionnels aux parties en leſquelles on veut le partager, au lieu d'être 3, 5, 11, fuſſent en général trois nombres connus & repréſentés par les lettres m, n, p; il eſt viſible qu'il ne faudroit qu'imiter ce que nous venons de faire.

Ainsi, la première part étant représentée par x

Pour avoir la seconde, je calculerois le quatrième terme de cette proportion $m : n :: x :$

Ce quatrième terme, ou la seconde part, seroit donc $\frac{nx}{m}$.

Et pour avoir la troisième, je calculerois le quatrième terme de cette proportion $m : p :: x :$

Ce quatrième terme, ou la troisième part, seroit donc $\frac{px}{m}$.

Les trois parts réunies feroient donc $x + \frac{nx}{m} + \frac{px}{m}$, ou $x + \frac{nx + px}{m}$; or elles doivent faire a; il faut donc que $x + \frac{nx + px}{m} = a$.

Chassant le dénominateur, on a $mx + nx + px = ma$, & par conséquent (61) en divisant, $x = \frac{ma}{m + n + p}$; ce qui nous donne lieu de faire remarquer l'utilité de l'Algèbre, pour découvrir des règles de calcul.

Si l'on vouloit calculer le quatrième terme d'une proportion dont les trois premiers seroient $m + n + p : m :: a :$; il est visible (*Arith.* 179) que ce quatrième terme seroit $\frac{am}{m + n + p}$; & puisque nous trouvons que x est exprimé par la même quantité, concluons-en que, pour avoir x, il faut calculer le quatrième terme d'une proportion dont le premier est la somme des parties proportionnelles; le second, la première de ces parties; & le troisième est le nombre même qu'il s'agit de partager; ce qui est précisément la règle que nous avons donnée (*Arith.* 197).

Question quatrième : *On a fait partir de Dreux, pour Brest, un courier qui fait 2 lieues par heure. Huit heures après son départ, on en a fait partir un autre de Paris, pour Brest,*

&

& celui-ci fait 3 lieues par heure. On demande où il rencontrera le premier, sachant d'ailleurs qu'il y a 17 lieues de Paris à Dreux.

Si l'on me disoit combien le second courier doit faire de lieues pour attraper le premier, je vérifierois ce nombre en cette manière. Je chercherois combien le premier a dû faire de chemin pendant que le second a été en marche; & comme ils en doivent faire, en même temps, à proportion de leur vîtesse, c'est-à-dire, à proportion du nombre de lieues qu'ils font par heure, je trouverois combien le premier a dû faire, en calculant le quatrième terme de cette proportion.. 3 : 2 :: le nombre de lieues faites par le second, est au nombre de lieues que le premier aura faites dans le même temps. Ayant trouvé ce quatrième terme, j'y ajouterois le nombre de lieues que le premier courier a dû faire pendant les 8 heures qu'il avoit d'avance, & enfin les 17 lieues de Paris à Dreux, qu'il avoit aussi d'avance; & le tout devroit former le nombre de lieues que le second a faites. Conduisons-nous donc de la même manière en représentant par x, le nombre de lieues que fera le second courier.

Pour trouver le nombre de lieues que le premier fait pendant que le second fait x, je calcule le quatrième terme de cette proportion.. $3 : 2 :: x :$; ce quatrième terme est $\frac{2x}{3}$; or pendant 8 heures, ce même premier courier a dû faire 16 lieues, à raison de 2 lieues par heure; & puisqu'il y a 17 lieues de Paris à Dreux, si l'on réunit ces trois quantités, on aura $\frac{2x}{3} + 16 + 17$, ou $\frac{2x}{3} + 33$ pour le chemin qu'aura dû faire le second courier, lorsqu'il attrapera le premier. Puis donc, qu'on a supposé qu'alors il auroit fait x de lieues, il faut que $\frac{2x}{3} + 33 = x$.

Il ne s'agit plus que d'avoir x par le moyen des règles données ci-dessus. Je chasse donc le dénominateur 3, & j'ai (64) l'équation $2x + 99 = 3x$; transposant tous les x dans le second membre & réduisant, j'ai $99 = x$; c'est-à-dire, que les deux couriers se rencontreront, lorsque le second courier aura fait 99 lieues, ou qu'ils se rencontreront à 99 lieues de Paris.

En effet, pendant que le second fera 99 lieues, le premier fera 66 lieues, puisqu'il fait 2 lieues pendant que le second en fait trois; or il a 16 lieues d'avance, par les 8 heures dont son départ précède celui du second, & il a de plus 17 lieues d'avance comme partant de Dreux; il sera donc alors à 99 lieues de Paris, c'est-à-dire, au même endroit que le second.

Avec un peu d'attention, on voit que quand on changeroit les nombres qui entrent dans cette question, la manière de raisonner & d'opérer n'en seroit pas, pour cela, différente. Représentons donc, en général, par a, l'intervalle des deux lieux de départ, qui étoit 17 lieues dans la question précédente : représentons par b, le nombre d'heures dont le départ du premier courier précède celui du second; par c le nombre de lieues que le premier fait par heure, & par d le nombre de lieues que fait le second par heure.

Si nous représentons toujours par x le nombre de lieues que le second courier doit faire pour rencontrer le premier, x sera encore composé de l'intervalle des deux lieux de départ, du chemin que le premier peut faire pendant le nombre b d'heures, & enfin du chemin que le premier fera pendant tout le temps que le second sera en marche.

Pour déterminer ce dernier chemin, j'observe que les

deux couriers marchant alors pendant le même temps, doivent faire du chemin à proportion de leurs vîtesses, ainsi x étant le chemin que le second est supposé faire, j'aurai celui que fait le premier pendant ce temps, en calculant le quatrième terme d'une proportion qui commenceroit par ces trois-ci $d : c :: x :$; ce quatrième terme sera donc $\frac{c \times x}{d}$ (*Arith.* 179) ou simplement $\frac{cx}{d}$. Or, puisque ce premier courier est supposé faire le nombre c de lieues par heure, il a dû, dans le nombre b d'heures, en faire b de fois autant, c'est-à-dire, 8 fois si b vaut huit, 30 fois si b vaut trente; en général, il en doit faire autant qu'il y a d'unités dans $c \times b$ ou bc; il en a donc fait une quantité exprimée par bc.

Réunissons donc maintenant le nombre de lieues $\frac{cx}{d}$, avec le nombre de lieues bc, & avec le nombre de lieues a, & le tout $\frac{cx}{d} + bc + a$ sera ce que le second courier a dû faire; or on a supposé que x étoit ce qu'il a dû faire; donc $x = \frac{cx}{d} + bc + a$. Chassant le dénominateur, on a $dx = cx + bcd + ad$; transposant, $dx - cx = bcd + ad$; divisant enfin (61), on a $x = \frac{bcd + ad}{d - c}$, qui donne la solution de toutes les questions de cette espèce, au moins tant qu'on suppose que les deux couriers vont du même côté, & que le départ du courier qui va le moins vîte, précède celui du second.

Pour montrer l'usage de cette formule, reprenons l'exemple précédent, & rappellons-nous que, dans ce cas, a représente 17 lieues; c'est-à-dire, $a = 17^l$, $b = 8^h$, $c = 2^l$, $d = 3^l$. Alors la valeur générale de x devient $x =$

$\frac{17 \times 3 + 8 \times 2 \times 3}{3 - 2}$, c'eſt-à-dire, $x = \frac{51 + 48}{1} = 99$, comme ci-deſſus.

Tel eſt donc l'uſage de ces ſolutions générales, qu'en y ſubſtituant à la place des lettres, les nombres qu'elles ſont deſtinées à repréſenter, & faiſant les opérations que la diſpoſition & les ſignes de ces lettres indiquent, on trouve la réſolution de toutes les queſtions particulières de même eſpèce.

Par exemple, ſi l'on propoſoit cette autre queſtion: *L'aiguille des heures d'une montre répond à 17 minutes, & celle des minutes répond à 24 minutes, c'eſt-à-dire, qu'il eſt 3^h 24^m: on demande à quel nombre d'heures & de minutes, ces deux aiguilles ſeront l'une ſur l'autre.*

Puiſque l'aiguille des heures & celle des minutes marchent en même temps, la quantité b par laquelle nous avons repréſenté ce dont le départ d'un des couriers précède celui du ſecond eſt ici zéro. L'intervalle des deux lieux de départ eſt ici le chemin que l'aiguille des minutes a à faire pour venir de la vingt-quatrième diviſion du cadran, à la dix-ſeptième, c'eſt-à-dire, que $a = 53$ diviſions: or, pendant que l'aiguille des minutes parcourt les 60 diviſions, celle des heures n'en parcourt que 5; on a donc $c = 5$, $d = 60$. Puiſque $b = 0$, je rejette de la formule $x = \frac{ad + bcd}{d - c}$, le terme bcd, ou $b \times cd$, parce que zéro multiplié par tout ce qu'on voudra, fait toujours zéro. J'aurai donc, pour le cas préſent $x = \frac{ad}{d - c}$; & en ſubſtituant pour a, d, c, leurs valeurs, $x = \frac{53 \times 60}{60 - 5} = \frac{3180}{55}$ $= 57 \frac{45}{55} = 57 \frac{9}{11}$, c'eſt-à-dire, qu'il faudra que l'aiguille

des minutes parcourre encore 57 divisions & $\frac{2}{11}$, ainsi, puisqu'elle répondoit à la vingt-quatrième division, elle répondra à 81 divisions & $\frac{2}{11}$; ou, puisque 60 divisions font un tour, les deux aiguilles seront l'une sur l'autre à 21′ $\frac{2}{11}$ de l'heure suivante, c'est-à-dire, 4^h 21′ $\frac{2}{11}$.

L'avantage des solutions littérales sur les solutions numériques, ne consiste pas seulement en ce que, pour chaque question particulière, il ne s'agit plus que de substituer des nombres: souvent, par certaines préparations, on rend ces solutions susceptibles d'un énoncé simple & facile à retenir. Par exemple, la formule $x = \frac{ad + bcd}{d - c}$ que nous venons de trouver, est dans ce cas: la quantité d étant facteur commun des deux termes du numérateur, on peut écrire la valeur de x en cette manière, $x = \frac{(a + bc) \times d}{d - c}$; or, sous cette forme, on peut reconnoître que la valeur de x est le quatrième terme d'une proportion dont les trois premiers seroient $d - c : d :: a + bc :$; mais de ces trois termes, le premier, $d - c$, marque la différence des vîtesses des deux couriers; le second, d, marque la vîtesse du second courier; & le troisième, $a + bc$, est composé de l'intervalle a des deux lieux de départ, & de la quantité bc ou $c \times b$ qui exprime combien le premier courier fait de lieues pendant le nombre d'heures qu'il a d'avance; ensorte que $a + bc$ marque toute l'avance que le premier a sur le second; la résolution de la question peut donc se réduire à cet énoncé: Multipliez le chemin que le premier fait par heure, par le nombre d'heures qu'il a d'avance, & l'ayant ajouté à l'intervalle des deux lieux de départ, faites cette règle de trois... La différence des vîtesses des deux couriers est à la vîtesse du second, comme la somme

des deux nombres que vous venez d'ajouter, eſt à un quatrième terme : ce ſera le nombre de lieues que le ſecond courier doit faire pour rencontrer le premier. Ainſi dans le premier exemple ci-deſſus, le premier courier ayant 8 heures d'avance, & faiſant 2 lieues par heure, on a 16 lieues à ajouter à 17 lieues, intervalle des deux lieux de départ, ce qui donne 33. Je calcule donc le quatrième terme de cette proportion $3 - 2 : 3 :: 33 :$, ou $1 : 3 :: 33 :$; ce quatrième terme eſt 99, comme ci-deſſus.

68. Au reſte, qu'il y ait des fractions ou qu'il n'y en ait point, c'eſt toujours la même règle. Par exemple, ſi le premier courier faiſoit 7 lieues en 4 heures; le ſecond, 13 lieues en 5 heures : ſi le premier courier avoit 15 heures d'avance, & qu'enfin l'intervalle des deux lieux de départ fût de 42 lieues; je dirois : Puiſque le premier courier fait ſept lieues en 4 heures, c'eſt $\frac{7}{4}$ de lieues par heure; pareillement, pour le ſecond, c'eſt $\frac{13}{5}$ de lieue par heure; donc pendant les 15 heures que le premier a d'avance, il doit, à raiſon de $\frac{7}{4}$ de lieue par heure, faire 15 fois $\frac{7}{4}$ de lieue ou $\frac{105}{4}$ de lieue, leſquels ajoutés à 42 lieues, font $42 + \frac{105}{4}$ ou $\frac{273}{4}$; je calcule donc le quatrième terme de cette proportion $\frac{13}{5} - \frac{7}{4} : \frac{13}{5} :: \frac{273}{4} :$; ce quatrième terme ſera $\frac{\frac{13}{5} \times \frac{273}{4}}{\frac{13}{5} - \frac{7}{4}}$, ou (*Arith.* 106) $\frac{\frac{3549}{20}}{\frac{13}{5} - \frac{7}{4}}$, ou (en réduiſant les deux fractions inférieures, au même dénominateur), $\frac{\frac{3549}{20}}{\frac{52-35}{20}}$, ou $\frac{\frac{3549}{20}}{\frac{17}{20}}$, ou (*Arith.* 109) $\frac{3549}{20} \times \frac{20}{17}$, ou enfin $\frac{3549}{17}$; car en omettant le facteur 20 qui doit multiplier le numérateur & le dénominateur, on ne change rien à la fraction. La valeur de $\frac{3549}{17}$ eſt $208\frac{13}{17}$. C'eſt le nombre de lieues que le ſecond courier ſeroit obligé de faire.

Réflexions sur les quantités positives & les quantités négatives.

69. Lorsqu'on a ainsi résolu, d'une manière générale, toutes les questions d'une même espèce, on peut souvent faire usage de ces formules générales pour la résolution d'autres questions dont les conditions seroient tout opposées à celles qu'on a eu en vue de remplir : un simple changement de + en —, ou de — en +, dans les signes des quantités suffit souvent. Mais avant de faire connoître ce nouvel usage des signes, il faut les considérer sous un nouvel aspect.

Les lettres ne représentent que la valeur absolue des quantités. Les signes + & — n'ont représenté jusqu'ici que les opérations de l'addition & de la soustraction; mais ils peuvent aussi représenter, dans plusieurs cas, la manière d'être des quantités les unes à l'égard des autres.

Une même quantité peut être considérée sous deux points de vue opposés, ou comme capable d'augmenter une quantité, ou comme capable de la diminuer. Tant qu'on ne représentera cette quantité que par une lettre ou par un nombre, rien ne désignera quel est celui de ces deux aspects sous lequel on la considère. Par exemple, dans l'état d'un homme

qui auroit autant de biens que de dettes, le même nombre peut servir à exprimer la quantité numérique des unes & des autres ; mais ce nombre, tel qu'il soit, ne feroit point connoître la différence des unes aux autres. Le moyen le plus naturel de faire sentir cette différence, c'est de les désigner par un signe qui indique l'effet qu'elles peuvent avoir l'une sur l'autre ; or l'effet des dettes étant de retrancher sur les possessions, il est naturel de désigner celles-là en leur appliquant le signe —.

Pareillement, si l'on regarde une ligne droite (*fig.* 1), comme engendrée par le mouvement d'un point *A* mû perpendiculairement à la ligne *BC*, on voit que ce point pouvant aller ou de *A* vers *D*, ou de *A* vers *E*, si l'on représente par *a* le chemin *AD* ou *AE* qu'il a fait, on ne détermine pas encore absolument la situation de ce point. Le moyen de la fixer, est d'indiquer par quelque signe, si la quantité *a* doit être considérée à droite ou à gauche ; or les signes + & — sont propres à cet effet ; car si l'on estime le mouvement du point *A* à l'égard d'un point *L* connu & regardé comme terme fixe ; lorsque le point *A* se meut vers *D*, ce qu'il décrit tend à augmenter *LA* ; & lorsqu'il se meut vers *E*, ce qu'il décrit tend au contraire à diminuer *LA* ; il est donc naturel de représenter *AD* par + *a* ou

ſimplement par a, & au contraire, de repréſenter AE par $-a$. Ce ſeroit tout le contraire, ſi au lieu de rapporter le mouvement du point A, au point L, on l'avoit rapporté au point O.

Les quantités négatives ont donc une exiſtence auſſi réelle que les poſitives, & elles n'en diffèrent qu'en ce qu'elles ont une acception toute contraire, dans le calcul.

Les quantités poſitives & les quantités négatives peuvent ſe trouver & ſe trouvent ſouvent mêlées enſemble dans un calcul, non-ſeulement parce que certaines opérations ont conduit, comme nous l'avons vu juſqu'ici, à retrancher certaines quantités, d'autres quantités; mais encore parce que l'on a ſouvent beſoin d'exprimer dans le calcul, les différens aſpects ſous leſquels on conſidère les quantités.

70. Si donc après avoir réſolu une queſtion, il arrivoit que la valeur de l'inconnue trouvée par les méthodes ci-deſſus, fût négative; par exemple, ſi l'on arrivoit à un réſultat tel que celui-ci, $x = -3$, il faudroit en conclure que la quantité qu'on a déſignée par x, n'a point les propriétés qu'on lui a ſuppoſées en faiſant le calcul, mais des propriétés toutes contraires. Par exemple, ſi l'on propoſoit cette queſtion, trouver un nombre qui étant ajouté à 15 donne 10; cette queſtion eſt évidemment impoſſible; ſi l'on repréſente le nombre cherché

par x, on aura cette équation $x + 15 = 10$, & par conséquent, en vertu des règles ci-dessus, $x = 10 - 15$ ou $x = -5$. Cette dernière conclusion me fait donc voir que x que j'avois considéré comme devant être ajouté à 15, pour former 10, en doit au contraire être retranché. Ainsi toute solution négative indique quelque fausse supposition dans l'énoncé de la question; mais en même temps elle en indique la correction, en ce qu'elle marque que la quantité cherchée doit être prise dans un sens tout opposé à celui dans lequel elle a été prise.

71. Concluons donc de-là, que si après avoir résolu une question dans laquelle quelques-unes des quantités étoient prises dans un certain sens, si, dis-je, on veut résoudre cette même question en prenant ces mêmes quantités dans un sens tout opposé, il suffira de changer les signes qu'ont actuellement ces quantités. Par exemple, dans la question quatrième, résolue généralement pour le cas où les deux couriers alloient vers un même côté, si je veux avoir la résolution de toutes les questions qu'on peut proposer dans le cas où ils viennent au-devant l'un de l'autre, j'y satisferai, en changeant, dans la valeur de x que nous avons trouvée $x = \frac{ad + bcd}{d - c}$, le signe de c. En effet, puisque le premier courier vient au-devant du second au lieu de s'en éloigner, il

diminue le chemin que celui-ci doit faire ; il le diminue à raiſon du chemin c qu'il fait par heure ; il faut donc exprimer que c, au lieu d'ajouter, retranche ; il faut donc, au lieu de $+c$, mettre $-c$. Ce changement donnera $x=\frac{ad-bcd}{d+c}$; car en changeant le ſigne de c, dans le terme $+bcd$ qui n'eſt autre choſe que $+bd\times+c$, il faudroit écrire $+bd\times-c$, qui (24) revient à $-bcd$.

Confirmons tout cela par un exemple : ſuppoſons deux couriers venant en ſens contraires, & partis de deux endroits éloignés de cent lieues. Le premier part ſept heures avant le ſecond, & fait deux lieues par heure ; le ſecond en fait trois par heure. En nommant x le chemin que fera celui-ci juſqu'à la rencontre, je vois que x ſera égal à la différence entre la diſtance totale & le chemin qu'aura fait le premier courier : or le chemin qu'aura fait celui-ci eſt compoſé du chemin qu'il peut faire pendant ſept heures, & du chemin qu'il fera pendant que le ſecond ſera en marche : à l'égard de ce dernier chemin, on le déterminera en calculant le quatrième terme de cette proportion $3:2::x:$; ce quatrième terme ſera $\frac{2x}{3}$; & puiſque le chemin que fait le premier courier pendant les ſept heures qu'il a d'avance, doit être de 14 lieues, à raiſon de 2 lieues par heure, il aura donc fait en tout $14+\frac{2x}{3}$; donc il ne reſte à faire pour le ſecond courier, que la quantité $100-14-\frac{2x}{3}$ ou $86-\frac{2}{3}x$; puis donc qu'on a repréſenté par x ce qu'il avoit à faire, il faut que $x=86-\frac{2}{3}x$; équation d'où l'on tire $3x=258-2x$, ou $5x=258$, ou enfin $x=\frac{258}{5}=51\frac{3}{5}$. Or ſi l'on ſubſtitue

dans la formule $x = \frac{ad - bcd}{d + c}$ que nous prétendons convenir à ce cas, si l'on substitue, dis-je, 100 pour a, 7 pour b, 3 pour d, & 2 pour c, on aura $x = \frac{100 \times 3 - 7 \times 2 \times 3}{3 + 2} = \frac{300 - 42}{5} = \frac{258}{5} = 51\frac{3}{5}$; ce qui est absolument la même chose.

A mesure que nous avancerons, nous aurons soin de fixer de plus en plus l'idée qu'on doit se faire des quantités négatives.

72. Comme il importe beaucoup d'acquérir la facilité de mettre en équation, nous joignons ici quelques questions simples, pour exercer les Commençans, nous contentant d'en donner le résultat pour servir à confirmer leurs essais. Après avoir résolu ces questions en nombres, ainsi qu'elles sont proposées, on fera très-bien de s'exercer à les résoudre, en substituant des lettres aux nombres : c'est en imitant ainsi les solutions particulières, que l'on acquiert la facilité de généraliser & d'étendre ses idées.

Trouver un nombre qui étant successivement ajouté à 5 & à 12, donne deux sommes qui soient l'une à l'autre, comme 3 est à 4. . . . Rép. 16.

Trouver un nombre dont la moitié, le tiers, & les $\frac{2}{5}$ réunis, surpassent ce nombre de 7. . . . Rép. 30.

On emploie trois ouvriers dont le premier fait 5 toises d'ouvrage par jour, le second 7, & le troisième 8; on demande en quel temps ces trois ouvriers, travaillant ensemble, feront 100 toises. . . . Rép. 5 jours.

On a loué un ouvrier pareſſeux à raiſon de 24 ſols pour chaque jour qu'il travailleroit; mais à condition de lui retenir, ſur ce qui lui ſeroit dû, 6 ſols pour chaque jour qu'il ne travailleroit pas. On lui fait ſon compte au bout de 30 jours, & il ſe trouve qu'il n'a rien à recevoir, on demande combien de jours il a travaillé. . . . Rép. 6 jours.

Un homme achète un cheval qu'il vend enſuite 90 livres de plus qu'il ne l'a acheté. A ce marché il ſe trouve gagner 10 pour cent du prix qu'il le vend; on demande combien il l'a acheté. . . . Rép. 900 liv.

On a payé une certaine ſomme en 15 paiemens qui ont été en augmentant toujours de la même quantité; le premier paiement a été de 7 livres, le dernier de 37 livres; on demande de combien chaque paiement augmentoit. . . . Rép. $2\frac{1}{7}$.

On a de l'eau de mer, qui ſur 32 livres contient une livre de ſel; on demande combien il faudroit y mêler d'eau douce pour que ſur 32 livres du mélange, il n'y eût plus que 2 onces de ſel. . . . Rép. 224 livres.

Des Équations du premier degré, à deux inconnues.

73. Soit qu'il y ait pluſieurs inconnues, ſoit qu'il n'y en ait qu'une, la méthode qu'on doit ſuivre pour mettre en équation eſt toujours la même. Mais, en général, il faut former autant d'équations que peuvent en donner les conditions de la queſtion. Si ces conditions ſont toutes diſtinctes & indépendantes les unes des autres, & ſi, en même temps,

chacune peut être exprimée par une équation, la question ne peut avoir plus d'une solution, lorsque toutes ces équations sont du premier degré, & qu'en même temps il y en a autant que d'inconnues. Mais si quelqu'une des conditions se trouve ou explicitement ou implicitement comprise dans quelqu'une des autres, ou si le nombre des conditions est moindre que le nombre des inconnues, alors on aura moins d'équations que d'inconnues; & la question peut avoir une infinité de solutions, à moins que quelque condition particulière, mais qui ne peut être exprimée par une équation, n'en limite le nombre. Nous éclaircirons tout cela par des exemples.

Nous supposerons d'abord deux équations & deux inconnues.

Les règles que nous avons établies concernant les équations à une inconnue, ont également lieu pour les équations à plusieurs inconnues; mais il faut y ajouter la règle suivante pour les équations à deux inconnues.

74. *Prenez dans chaque équation la valeur d'une même inconnue, en opérant comme si tout le reste étoit connu : égalez ces deux valeurs, & vous aurez une équation qui ne renfermera plus que la seconde inconnue, que vous déterminerez par les règles précédentes. Cette seconde inconnue étant trouvée, substituez sa valeur dans*

l'une ou l'autre des deux valeurs que vous avez prises par la première opération, & vous aurez la seconde inconnue.

Par exemple, si j'avois les deux équations $2x + y = 24$, $5x + 3y = 65$. De la première, je tirerois en transposant, $2x = 24 - y$, & en divisant, $x = \frac{24 - y}{2}$. De la seconde, je tire en transposant, $5x = 65 - 3y$, & en divisant, $x = \frac{65 - 3y}{5}$.

J'égale les deux valeurs de x, en écrivant $\frac{24 - y}{2} = \frac{65 - 3y}{5}$. Équation qui ne renferme plus que la seconde inconnue y.

Pour avoir la valeur de y, je chasse (64) les dénominateurs 2 & 5; & j'ai $120 - 5y = 130 - 6y$: transposant & réduisant, j'ai $y = 10$.

Pour avoir x, je substitue, au lieu de y, sa valeur 10 dans la première valeur de x trouvée ci-dessus. (On pourroit également substituer dans la seconde). Cette substitution me donne $x = \frac{24 - 10}{2} = \frac{14}{2} = 7$.

75. Prenons pour second exemple, les deux équations $\frac{4x}{5} - \frac{5y}{6} = 2$, & $\frac{2}{3}x + \frac{3}{4}y = 19$.

Je commence par chasser les dénominateurs (64), dans chacune de ces équations, ce qui les change en ces deux autres, $24x - 25y = 60$ & $8x + 9y = 228$. De la première de ces deux-ci, je tire en transposant, $24x = 60 + 25y$, & en divisant, $x = \frac{60 + 25y}{24}$. De la seconde, j'ai en transposant, $8x = 228 - 9y$, & en divisant, $x = \frac{228 - 9y}{8}$.

J'égale ces deux valeurs de x, en écrivant $\frac{60+25y}{24} = \frac{228-9y}{8}$; équation qui ne renferme plus que y.

Pour avoir la valeur de cette inconnue, je chasse les dénominateurs, & j'ai $480+200y = 5472-216y$; transposant, il me vient $200y+216y = 5472-480$, qui se réduit à $416y = 4992$; enfin, divisant, j'ai $y = \frac{4992}{416} = 12$.

Pour avoir x, je mets, au lieu de y, sa valeur 12 dans l'une ou l'autre des deux valeurs de x, dans la première, par exemple; c'est-à-dire, dans $x = \frac{60+25y}{24}$, laquelle devient par-là, $x = \frac{60+25 \times 12}{24} = \frac{60+300}{24} = \frac{360}{24} = 15$.

76. Prenons pour troisième exemple, les deux équations $\frac{2}{3}x = \frac{1}{4}x + \frac{3}{7}y - 9$ & $\frac{4}{5}x - \frac{2}{7}y = \frac{1}{2}y - 6$.

Je commence par faire disparoître les dénominateurs (64);

J'ai $56x = 35x + 60y - 1260$.
Et $56x - 20y = 35y - 420$.

De la première je tire, en transposant & réduisant, $21x = 60y - 1260$, & en divisant, $x = \frac{60y-1260}{21}$.

La seconde me donne, en transposant & réduisant, $56x = 55y - 420$, & en divisant, $x = \frac{55y-420}{56}$.

Égalant ces deux valeurs de x, j'ai $\frac{60y-1260}{21} = \frac{55y-420}{56}$.

Pour avoir la valeur de y dans cette équation, je chasse les dénominateurs, & j'ai $3360y - 70560 = 1155y - 8820$; transposant & réduisant, il vient $2205y = 61740$; enfin en divisant, on a $y = \frac{61740}{2205} = 28$.

Pour avoir la valeur de x, je substitue, au lieu de y, sa valeur

valeur 28, dans l'équation $x = \frac{60y - 1260}{21}$ trouvée ci-dessus ; ce qui donne $x = \frac{60 \times 28 - 1260}{21} = \frac{1680 - 1260}{21} = \frac{420}{21} = 20$.

77. Si les équations étoient littérales, on opéreroit de la même manière. Ainsi, si l'on avoit les deux équations $ax + by = c$, & $dx + fy = e$, dans lesquelles a, b, c, d, e, f marquent des quantités connues, positives ou négatives; la première donneroit, par transposition $ax = c - by$, & par division, $x = \frac{c - by}{a}$; la seconde donneroit de même par transposition $dx = e - fy$, & par division $x = \frac{e - fy}{d}$. Égalant ces deux valeurs de x, on auroit $\frac{c - by}{a} = \frac{e - fy}{d}$; chassant les fractions, on a $cd - bdy = ae - afy$; transposant, $afy - bdy = ae - cd$; enfin, divisant (61), on a $y = \frac{ae - cd}{af - bd}$.

Pour avoir la valeur de x, il faut substituer, au lieu de y, sa valeur $\frac{ae - cd}{af - bd}$, dans l'une des deux valeurs de x, dans $x = \frac{c - by}{a}$, par exemple. Cette substitution donnera $x = \frac{c - b \times \frac{ae - cd}{af - bd}}{a}$ qui revient à $x = \frac{c - \frac{abe + bcd}{af - bd}}{a}$, ou (45) réduisant c en fraction,

$$x = \frac{\frac{afc - bcd - abe + bcd}{af - bd}}{a}, \text{ ou } x = \frac{\frac{afc - abe}{af - bd}}{a}, \text{ ou}$$

(52), $x = \frac{afc - abe}{aaf - abd}$, ou enfin (33), $x = \frac{fc - be}{af - bd}$.

78. Nous avons ſuppoſé juſqu'ici, que les deux inconnues ſe trouvoient toutes deux dans chaque équation. Lorſque cela n'arrive point, le calcul ne diffère des précédens qu'en ce qu'il eſt plus ſimple.

Par exemple, ſi l'on avoit $5ax = 3b$ & $cx + dy = e$: la première donneroit $x = \frac{3b}{5a}$; & la ſeconde, $x = \frac{e - dy}{c}$. Égalant ces deux valeurs, on auroit $\frac{3b}{5a} = \frac{e - dy}{c}$; d'où chaſſant les dénominateurs, tranſpoſant & réduiſant, on tire $y = \frac{5ae - 3bc}{5ad}$.

Des Équations du premier degré, à trois, & à un plus grand nombre d'inconnues.

79. Ce que nous venons de dire étant une fois bien conçu, il eſt facile de voir comment on doit ſe conduire, lorſque le nombre des inconnues & des équations eſt plus conſidérable.

Nous ſuppoſerons toujours qu'on ait autant d'équations que d'inconnues. Si l'on en a trois, *on prendra dans chacune la valeur d'une même inconnue, comme ſi tout le reſte étoit connu. On égalera enſuite la première valeur à la ſeconde, & la première à la troiſième; ou*

bien l'on égalera la première à la seconde, & la seconde à la troisième. On aura, par ce procédé, deux équations à deux inconnues seulement ; & on les traitera par la règle précédente (74).

Soient, par exemple, les trois équations :

$$3x + 5y + 7z = 179$$
$$8x + 3y - 2z = 64$$
$$5x - y + 3z = 75$$

De la première, je tire, par transposition, $3x = 179 - 5y - 7z$; &, par division, $x = \frac{179 - 5y - 7z}{3}$.

De la seconde, j'ai, par transposition, $8x = 64 - 3y + 2z$, &, par division, $x = \frac{64 - 3y + 2z}{8}$.

De la troisième, j'ai, par transposition, $5x = 75 + y - 3z$, & par division, $x = \frac{75 + y - 3z}{5}$.

Égalant la première valeur de x à la seconde, j'ai $\frac{179 - 5y - 7z}{3} = \frac{64 - 3y + 2z}{8}$.

Égalant de même la première à la troisième, j'ai $\frac{179 - 5y - 7z}{3} = \frac{75 + y - 3z}{5}$.

Comme il n'y a plus que deux inconnues, je traite ces deux dernières équations suivant la règle donnée (74) pour les équations à deux inconnues. Je chasse donc d'abord les dénominateurs, ce qui me donne les deux équations suivantes $1432 - 40y - 56z = 192 - 9y + 6z$, & $895 - 25y - 35z = 225 + 3y - 9z$.

Je prends dans chacune de ces équations la valeur de y :

la première me donne, en transposant & réduisant, $1240 - 62z = 31y$, & en divisant, $y = \frac{1240 - 62z}{31}$. La seconde me donne, en transposant & réduisant, $670 - 26z = 28y$, & en divisant, $y = \frac{670 - 26z}{28}$.

J'égale ces deux valeurs de y, & j'ai $\frac{1240 - 62z}{31} = \frac{670 - 26z}{28}$, qui ne renferme plus qu'une inconnue. Pour en avoir la valeur, je chasse les dénominateurs, & j'ai $34720 - 1736z = 20770 - 806z$. Transposant & réduisant, il vient $13950 = 930z$; divisant enfin, on a $z = \frac{13950}{930} = \frac{1395}{93} = 15$.

Pour avoir y, je mets, au lieu de z, sa valeur 15, dans l'équation $y = \frac{1240 - 62z}{31}$ que nous venons de trouver ci-dessus, ce qui me donne $y = \frac{1240 - 62 \times 15}{31} = \frac{1240 - 930}{31} = \frac{310}{31} = 10$.

Enfin, pour avoir x, je mets, au lieu de y, sa valeur 10, & au lieu de z, sa valeur 15, dans l'une des trois valeurs de x trouvées ci-dessus; par exemple, dans $x = \frac{179 - 5y - 7z}{3}$, qui devient par-là $x = \frac{179 - 5 \times 10 - 7 \times 15}{3} = \frac{179 - 50 - 105}{3} = \frac{179 - 155}{3} = \frac{24}{3} = 8$.

80. Si toutes les inconnues n'entroient pas à la fois dans chaque équation, le calcul seroit plus simple, mais se feroit toujours d'une manière analogue.

Par exemple, si l'on avoit les trois équations, $5x +$

$5y = 65$, $2y - z = 11$, $3x + 4z = 57$. La première donneroit $x = \frac{65 - 3y}{5}$, la seconde ne donneroit point de valeur de x; la troisième donneroit $x = \frac{57 - 4z}{3}$; il n'y auroit donc que ces deux valeurs de x à égaler, elles donnent $\frac{65 - 3y}{5} = \frac{57 - 4z}{3}$, équation qui ne renferme plus d'x, & qui étant traitée, avec la seconde équation $2y - z = 11$, selon les règles des équations à deux inconnues, donnera les valeurs de y & de z. En achevant le calcul, on trouvera $z = 9$, $y = 10$, $x = 7$.

81. On voit par-là que s'il y avoit un plus grand nombre d'équations, la règle générale feroit.... *Prenez, dans chaque équation, la valeur d'une même inconnue; égalez l'une de ces valeurs à chacune des autres, & vous aurez une équation & une inconnue de moins. Traitez ces nouvelles équations comme vous venez de faire pour les premières, & vous aurez encore une équation & une inconnue de moins. Continuez ainsi jusqu'à ce qu'enfin vous parveniez à n'avoir plus qu'une inconnue.*

82. Il ne sera peut-être pas inutile de placer ici une règle générale pour déterminer les valeurs des inconnues dans les équations du premier degré. Lorsque le nombre des inconnues est un peu considérable, & que les équations renferment tous les termes qu'elles peuvent renfermer, on est conduit, par la première méthode, si elles sont littérales, à des valeurs plus composées qu'il ne convient; à la vérité, on peut les réduire, mais c'est un travail qui devient d'autant plus long, que le nombre des inconnues est plus

considérable. D'ailleurs nous réduirons, par la suite, l'art de chasser les inconnues dans les équations qui passent le premier degré, à celui de les chasser dans celles du premier degré. Les méthodes que l'on a eues jusqu'ici pour éliminer ou chasser les inconnues, dans les équations qui passent le premier degré, ont toutes (si l'on en excepte seulement celles qu'ont données MM. Euler & Cramer) l'inconvénient de conduire à des équations beaucoup plus composées qu'il ne faut. Ces dernières même ne sont point à l'abri de cet inconvénient, lorsqu'on a plus de deux inconnues. Il peut donc être utile de donner ici des moyens faciles pour avoir les valeurs des inconnues dans les équations du premier degré. C'est ce que nous allons faire après avoir exposé une seconde méthode qui peut avoir son utilité dans plusieurs rencontres.

Soient les deux équations $3x + 4y = 81$ & $3x - 4y = 9$. Si l'on retranche la seconde de la première, on aura $8y = 72$, & par conséquent, $y = \frac{72}{8} = 9$. Au contraire, si l'on ajoute la première équation à la seconde, on aura $6x = 90$, & par conséquent, $x = \frac{90}{6} = 15$. On voit donc que lorsque les deux équations sont telles que le coëfficient de l'une des inconnues, est le même dans chacune, il est très-facile par une simple addition ou une simple soustraction, de réduire les deux équations à n'avoir qu'une inconnue.

83. Mais ne peut-on pas ramener les équations à cet état? On le peut toujours; il suffit pour cela de multiplier l'une des deux équations par un nombre convenable. Voici comment on doit s'y prendre pour trouver ce nombre. Soient les deux équations $4x + 3y = 65$, & $5x + 8y = 111$.

Je représente par m, le nombre dont il s'agit, & je

multiplie l'une des deux équations, la feconde par exemple, par m, ce qui me donne $5mx + 8my = 111m$. Je l'ajoute avec la première, & j'ai $4x + 5mx + 3y + 8my = 65 + 111m$, qu'on peut écrire ainfi $(4 + 5m)x + (3 + 8m)y = 65 + 111m$.

Si je veux maintenant faire difparoître les x, je n'ai qu'à fuppofer que le nombre m eft tel que $4 + 5m = 0$, ce qui me donne $m = -\frac{4}{5}$. Cette fuppofition réduit l'équation à $(3 + 8m)y = 65 + 111m$, qui donne $y = \frac{65 + 111m}{3 + 8m}$; Équation, qui, en mettant pour m fa valeur $-\frac{4}{5}$, devient, $y = \frac{65 - \frac{444}{5}}{3 - \frac{32}{5}} = \frac{\frac{325 - 444}{5}}{\frac{15 - 32}{5}} = \frac{\frac{-119}{5}}{\frac{-17}{5}}$ $= + \frac{119}{5} \times \frac{5}{17} = \frac{119}{17} = 7$.

Si au contraire j'avois voulu faire difparoître les y, j'aurois fuppofé m tel que $3 + 8m = 0$, c'eft-à-dire, que j'aurois égalé à zéro, le coëfficient ou multiplicateur de y, ce qui m'auroit donné $m = -\frac{3}{8}$. Cette fuppofition réduit l'équation à $(4 + 5m)x = 65 + 111m$, qui donne $x = \frac{65 + 111m}{4 + 5m}$; équation, qui, en mettant pour m fa valeur actuelle, $-\frac{3}{8}$, devient $x = \frac{65 - \frac{333}{8}}{4 - \frac{15}{8}} = \frac{\frac{520 - 333}{8}}{\frac{32 - 15}{8}} =$ $\frac{\frac{187}{8}}{\frac{17}{8}} = \frac{187}{17} = 11$.

84. Si l'on avoit trois équations & trois inconnues, on multiplieroit la feconde par un nombre m & la troifième

par un nombre n, & les ajoutant, ainsi multipliées, à la première, on supposeroit égal à zéro, le coëfficient de chacune de deux des trois inconnues x, y & z. On auroit, pour déterminer m & n, deux équations que l'on traiteroit comme dans le cas précédent.

Par exemple, prenons les trois équations $3x + 5y + 7z = 179$, $8x + 3y - 2z = 64$, $5x - y + 3z = 75$ que nous avons déjà traitées. En multipliant la seconde par m, la troisième par n, & les ajoutant à la première, on aura $3x + 8mx + 5nx + 5y + 3my - ny + 7z - 2mz + 3nz = 179 + 64m + 75n$ qu'on peut écrire ainsi, $(3 + 8m + 5n)x + (5 + 3m - n)y + (7 - 2m + 3n)z = 179 + 64m + 75n$.

Si c'est z que je veux avoir, je supposerai $3 + 8m + 5n = 0$ & $5 + 3m - n = 0$; ce qui réduit l'équation à $(7 - 2m + 3n)z = 179 + 64m + 75n$, qui donne $z = \frac{179 + 64m + 75n}{7 - 2m + 3n}$; il ne s'agit donc plus que de déterminer m & n, ce que l'on fera par le moyen des deux équations $3 + 8m + 5n = 0$, & $5 + 3m - n = 0$, que l'on traitera comme dans le cas précédent, c'est-à-dire, qu'on multipliera la seconde par un nombre p & on l'ajoutera à la première, ce qui donnera $3 + 5p + 8m + 3pm + 5n - pn = 0$, qu'on écrira ainsi, $3 + 5p + (8 + 3p)m + (5 - p)n = 0$; pour avoir n, on supposera $8 + 3p = 0$, ce qui réduira l'équation à $3 + 5p + (5 - p)n = 0$, qui donne $n = \frac{-3 - 5p}{5 - p}$; or l'équation $8 + 3p = 0$, donne $p = -\frac{8}{3}$; donc $n = \frac{-3 + \frac{40}{3}}{5 + \frac{8}{3}}$, qui se réduit à $n = \frac{31}{23}$; par une opération

ſemblable, on trouvera $m = -\frac{28}{23}$, ſubſtituant donc dans la valeur de z, on aura $z = \frac{179 - 64 \cdot \frac{28}{23} + 75 \cdot \frac{31}{23}}{7 - 2 \cdot \frac{-28}{23} + 3 \cdot \frac{31}{23}}$, qui ſe réduit à $z = 15$. On voit par-là, comment on s'y ſeroit pris, ſi au lieu de z, on avoit voulu avoir y ou x; mais, lorſque l'une des inconnues eſt trouvée, il ſeroit ſuperflu de recommencer un calcul ſemblable pour chacune des autres, il faut ſubſtituer la valeur de cette inconnue dans les équations propoſées; & employant une équation de moins, on détermine les autres valeurs, comme pour le cas où il y a une équation de moins.

85. En ſuivant cette méthode, ou la première, on peut dreſſer des formules générales qui repréſentent les valeurs des inconnues dans tous les cas imaginables. C'eſt ainſi qu'on trouvera que ſi l'on repréſente généralement deux équations du premier degré à deux inconnues par $ax + by + c = 0$, & $a'x + b'y + c' = 0$, ce qu'on peut toujours faire, en paſſant tous les termes dans un même membre, & repréſentant par une ſeule lettre la totalité des quantités connues qui multiplient chaque inconnue, & la totalité des termes entièrement connus, on trouvera, dis-je, que les valeurs de x & de y ſont exprimées en cette manière : $x = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b}$, $y = \frac{a'c - ac'}{ab' - a'b}$.

Pareillement, ſi l'on repréſente trois équations du premier degré à trois inconnues, par $ax + by + cz + d = 0$, $a'x + b'y + c'z + d' = 0$, $a''x + b''y + c''z + d'' = 0$, on trouvera que les valeurs de x, y & z, ſont exprimées en cette manière. . . . .

$$z = \frac{-ab'd'' + a'bd'' - a''bd' + ab''d' - a'b''d + a''b'd}{+ab'c'' - a'bc'' + a''bc' - ab''c' + a'b''c - a''b'c}$$

$$y = \frac{-ad'c'' + a'dc'' - a''dc' + ac'd'' - a'cd'' + a''cd'}{+ab'c'' - a'bc'' + a''bc' - ab''c' + a'b''c - a''b'c}$$

$$x = \frac{-b'c''d + bc''d' - bc'd'' + b''c'd - b''cd' + b'cd''}{+ab'c'' - a'bc'' + a''bc' - ab''c' + a'b''c - a''b'c}$$

Pour 4 équations & 4 inconnues, on auroit quatre fractions dont le numérateur & le dénominateur auroient chacun 24 termes. Ils auroient 120 termes pour 5 inconnues; 720, pour 6, & ainsi de suite, selon le produit des nombres 1. 2. 3. 4. 5., &c.

On voit donc qu'il feroit très-long de les calculer l'une après l'autre, en suivant pas à pas le procédé de la première ou de la seconde méthode. Un peu d'attention sur la forme des valeurs que nous venons de trouver, & sur celle que l'on trouveroit de même pour quatre équations & quatre inconnues, conduit aux conséquences suivantes qui facilitent & abrègent beaucoup le calcul.

1°. Les valeurs des inconnues x, y, z &c., en quelque nombre qu'elles soient, ont toutes le même dénominateur.

2°. Le numérateur de chacune se conclut de son dénominateur en changeant, dans celui-ci, le coëfficient de cette inconnue, contre la dernière lettre d de l'équation, & changeant tous les signes de + en — & de — en +. Par exemple, si dans le dénominateur de la valeur de x trouvée dernièrement, vous changez a en d, a' en d', a'' en d'', & si vous changez en même temps les signes, vous avez le numérateur.

Il sera donc facile de calculer chacune des inconnues, si nous pouvons avoir une règle pour trouver le dénominateur commun. Pour trouver cette règle, je remarque,

1°. que lorsqu'il n'y a qu'une équation & une inconnue, comme $ax + b = 0$, le dénominateur est a. 2°. Lorsqu'il y a deux équations & deux inconnues, le dénominateur est $ab' - a'b$. 3°. Lorsqu'il y a trois équations & trois inconnues, il est $+ ab'c'' - a'bc'' + a''bc' - ab''c' + a'b''c - a''b'c$ qu'on peut mettre sous cette forme $(ab' - a'b)c'' + (a''b - ab'')c' + (a'b'' - a''b')c$.

Or je remarque que $ab' - a'b$ dénominateur dans le cas de deux inconnues, se forme de a, dénominateur dans le cas d'une seule inconnue, en multipliant a par b', puis changeant dans ab', l'accent $'$ en o & o en $'$; (par la lettre qui auroit o pour accent, nous entendons la lettre que nous n'avons point accentuée); & enfin changeant $+$ en $-$.

Pareillement le dénominateur dans le cas de trois inconnues, savoir $(ab' - a'b)c'' + (a''b - ab'')c' + (a'b'' - a''b')c$, se forme de $(ab' - a'b)$, dénominateur dans le cas de deux inconnues, 1°. en multipliant celui-ci par c''. 2°. Changeant $''$ en $'$ & $'$ en $''$, changeant aussi les signes. 3°. Changeant dans ce dernier résultat $'$ en o & o en $'$, & les signes.

On voit donc que pour avoir le dénominateur pour quatre inconnues, on multiplieroit celui qui convient à trois inconnues, par d'''; on échangeroit ensuite $'''$ en $''$ & $''$ en $'''$, & on changeroit les signes. Dans ce second résultat, on changeroit $''$ en $'$ & $'$ en $''$, & les signes; dans ce troisième, on changeroit $'$ en o & o en $'$, & les signes.

La règle est générale actuellement, & l'on voit ce qu'il y a à faire dans le cas d'un plus grand nombre d'inconnues.

Quoiqu'on soit obligé de calculer les dénominateurs qui

conviennent à toutes les équations à un moindre nombre d'inconnues, il ne faut pas craindre que cette règle n'entraîne à plus de calculs qu'il n'est néceſſaire, tout ce que l'on calcule par cette règle, entre néceſſairement dans la quantité que l'on cherche.

Application des Règles précédentes à la réſolution de quelques queſtions qui renferment plus d'une inconnue.

86. Queſtion première: *Un homme a deux eſpèces de monnoie: ſept pièces de la plus forte eſpèce, avec douze pièces de la ſeconde, ſont 288 livres; & 12 pièces de la première eſpèce, avec ſept de la ſeconde, ſont 358 livres. On demande combien vaut chaque eſpèce de monnoie?*

Si l'on ſavoit combien vaut chaque eſpèce de pièce, en multipliant la valeur d'une pièce de la première eſpèce, par 7, & celle d'une pièce de la ſeconde eſpèce, par 12, & ajoutant les deux produits, on trouveroit 288 livres; pareillement, en multipliant la valeur d'une pièce de la première eſpèce, par 12, celle de la ſeconde par 7, & ajoutant les deux produits, on trouveroit 358 livres; cela étant, ſi je repréſente par x le nombre de livres ou la valeur d'une pièce de la première eſpèce, & par y celle d'une pièce de la ſeconde eſpèce, je pourrai raiſonner ainſi:

Chaque pièce de la première eſpèce valant x, les 7 pièces vaudront 7 fois x, ou $7x$; par la même raiſon 12 pièces de la ſeconde eſpèce vaudront $12y$; il faut donc que $7x + 12y = 288$.

Un raiſonnement ſemblable à l'égard de la ſeconde condition, fera voir qu'il faut que $12x + 7y = 358$. Il ne s'agit donc plus que de trouver les valeurs de x & de y.

Pour cet effet, je prends dans chaque équation la valeur de x. La première me donne, après la transposition & la division, $x = \frac{288 - 12y}{7}$; la seconde me donne $x = \frac{358 - 7y}{12}$; j'égale ces deux valeurs de x, & j'ai l'équation $\frac{288 - 12y}{7} = \frac{358 - 7y}{12}$.

Pour tirer de cette dernière la valeur de y, je chasse les dénominateurs (64) & j'ai $3456 - 144y = 2506 - 49y$, ou en transposant & réduisant, $950 = 95y$, ou enfin en divisant, $y = \frac{950}{95} = 10$. Pour avoir x, je reprends la première valeur de x, savoir $x = \frac{288 - 12y}{7}$, & substituant pour y, sa valeur 10, j'ai...........
$x = \frac{288 - 12 \times 10}{7} = \frac{288 - 120}{7} = \frac{168}{7} = 24$; donc la plus forte pièce étoit de 24 livres & la plus petite de 10 livres. En effet, 7 pièces de 24 livres font 168 livres, qui avec 12 pièces de 10 livres ou 120 livres, font 288 livres. De plus, 12 pièces de 24 livres, qui font 288 livres, avec sept pièces de 10 livres qui font 70 livres, donnent 358 livres.

Question seconde: *On a mêlé ensemble une certaine quantité d'or & une certaine quantité d'argent. Tout le mélange fait un volume de 12 pouces cubes, & pèse 100 onces : un pouce cube d'or pèse 12 onces $\frac{2}{3}$, & un pouce cube d'argent pèse 6 onces $\frac{8}{9}$. On demande quelle est la quantité d'or & quelle est la quantité d'argent qui ont été alliés?*

Si l'on connoissoit le nombre de pouces cubes de chaque espèce de matière, en ajoutant ces deux nombres, ils donneroient 12 pour leur somme. De plus, en prenant 12 onces $\frac{2}{3}$ autant de fois qu'il y a de pouces cubes d'or,

c'est-à-dire, en multipliant $12\frac{2}{3}$ par le nombre des pouces cubes d'or, on auroit le poids de l'or qui entre dans le mélange, & en multipliant de même 6 onces $\frac{8}{9}$ par le nombre des pouces cubes d'argent, on auroit le poids de l'argent, & en ajoutant ces deux produits, ils formeroient 100 onces.

Raisonnons donc de la même manière en représentant par x le nombre des pouces cubes d'or, & par y le nombre des pouces cubes d'argent: il faut donc que $x + y = 12$, D'un autre côté, chaque pouce cube d'or pesant 12 onces $\frac{2}{3}$, ou $\frac{38}{3}$ d'once, un nombre x de pouces d'or pesera $\frac{38}{3} \times x$ ou $\frac{38x}{3}$. Par la même raison chaque pouce cube d'argent pesant 6 onces $\frac{8}{9}$ ou $\frac{62}{9}$ d'once, un nombre y de pouces cubes, pesera $\frac{62}{9} \times y$ ou $\frac{62}{9}y$; donc l'or & l'argent réunis peseront $\frac{38}{3}x + \frac{62}{9}y$; or ils doivent peser 100 onces; donc $\frac{38}{3}x + \frac{62}{9}y = 100$.

Pour trouver les valeurs de x & de y, je chasse les dénominateurs de cette dernière équation, & j'ai $342x + 186y = 2700$. De la première équation je tire $x = 12 - y$, & la dernière donne $x = \frac{2700 - 186y}{342}$; égalant ces deux valeurs, on a $12 - y = \frac{2700 - 186y}{342}$.

Pour avoir y, je chasse le dénominateur, & il me vient $4104 - 342y = 2700 - 186y$; transposant & réduisant, $1404 = 156y$, & enfin en divisant, $y = \frac{1404}{156} = 9$; & comme on a trouvé $x = 12 - y$, on a donc $x = 3$, c'est-à-dire, qu'on a mêlé 3 pouces d'or avec 9 pouces d'argent. En effet, le tout fait 12 pouces cubes. D'ailleurs 3 pouces cubes pesant chacun 12 onces $\frac{2}{3}$ font 38 onces, & 9 pouces cubes pesant chacun 6 onces $\frac{8}{9}$ font 62 onces, lesquelles avec les 38, font 100 onces.

Si les deux matières qu'on a mêlées avoient des pesanteurs spécifiques (*) différentes, & si le volume, ainsi que le poids total du mélange, étoient différens de ce qu'on vient de supposer, la méthode, pour trouver les quantités de chaque espèce de matière, n'en seroit pas moins la même; ainsi pour renfermer dans une seule, toutes les solutions des questions de cette espèce, supposons généralement que le nombre total des pouces cubes des deux espèces de matière soit. . . . a.

Que le poids total du mélange exprimé en onces, soit. . . . . b.

Que le poids d'un pouce cube de la première matière soit. . . . . c.

Et celui d'un pouce cube de la seconde soit . . . . . . d.

c & d étant exprimés en onces.

Alors si nous représentons par x le nombre des pouces cubes de la première matière, & par y le nombre de pouces cubes de la seconde; nous aurons pour première équation . . . .

$$x + y = a.$$

D'ailleurs chaque pouce de la première matière pesant c d'onces, dès qu'il y a x de pouces cubes, la quantité de la première matière pesera $c \times x$ ou cx. Par la même raison, la quantité de la seconde matière pesera dy; ensorte que le total pesera $cx + dy$; & comme il est supposé péser b, il faut que $cx + dy = b$.

(*) On appelle *pesanteur spécifique*, la pesanteur d'un corps dont le volume est connu. Quand on dit: Un tel corps pèse 12 livres; on ne détermine que le poids de ce corps & non pas celui de l'espèce de matière dont il est composé; mais quand on dit, par exemple, 12 pouces cubes d'eau commune pèsent 7 onces 6 gros, alors on détermine la pesanteur de cette espèce d'eau; on met en état de déterminer combien pèse tout autre volume connu de cette même eau.

Cela posé, la première équation donne $x = a - y$; la seconde donne $x = \frac{b - dy}{c}$; égalant ces deux valeurs, on a $a - y = \frac{b - dy}{c}$; chassant le dénominateur, il vient $ac - cy = b - dy$, transposant & divisant, $y = \frac{ac - b}{c - d}$.

Pour avoir la valeur de x, il faut substituer dans l'équation $x = a - y$, la valeur qu'on vient de trouver pour y, & l'on aura $x = a + \frac{b - ac}{c - d}$, où l'on voit que j'ai changé les signes du numérateur de $\frac{ac - b}{c - d}$, parce que y doit être retranché de a (11). Cette valeur de x peut être simplifiée, en réduisant le tout en fraction (45), ce qui donnera $x = \frac{ac - ad + b - ac}{c - d}$, ou en réduisant, $x = \frac{b - ad}{c - d}$.

Les valeurs $x = \frac{b - ad}{c - d}$, & $y = \frac{ac - b}{c - d}$ que l'on vient de trouver, peuvent fournir une règle susceptible d'un énoncé assez simple, pour la résolution générale de toutes les questions de cette espèce.

Pour trouver cette règle, il faut faire attention 1°. que b marque le poids total du mélange; 2°. que a marquant le nombre total des parties du mélange, & d le poids d'une des parties de la seconde espèce, ad marque ce que peseroit le volume du mélange, s'il étoit composé seulement de la matière de la seconde espèce. En effet, si tout le volume étoit d'argent, par exemple, on trouveroit son poids total, en multipliant la pesanteur d d'un pouce cube d'argent, par le nombre total a des pouces cubes. Enfin le dénominateur $c - d$ est la différence des pesanteurs spécifiques de chaque espèce de matière.

Si l'on analyse, de même, la valeur de y, on verra que ac est

est ce que peseroit le volume du mélange, s'il étoit uniquement composé de la première matière. De-là on pourra conclure cette règle.

Calculez ce que peseroit le volume du mélange, s'il étoit composé seulement de la seconde matière; retranchez ce poids du poids total actuel du mélange, & divisez le reste par la différence des pesanteurs spécifiques des deux matières: le quotient sera le nombre des parties de la première matière qui entre dans le mixte.

Au contraire, *pour avoir le nombre des parties de la seconde matière, calculez ce que peseroit le volume du mélange, s'il étoit tout entier de la première matière; retranchez-en le poids total actuel du mélange, & divisez le reste par la même quantité que ci-dessus.*

Cette règle est précisément, ce qu'on appelle en Arithmétique, *la règle d'Alliage;* & qu'en Arithmétique nous avons renvoyée à cette troisième Partie.

On peut, à cette même question, en ramener une infinité d'autres, qui, au premier coup d'œil, ne semblent pas de même espèce: par exemple, celle-ci: *Faire 522 liv. en 42 pièces, les unes de 24 liv. & les autres de 6 livres;* car avec un peu d'attention, on voit que cette question est la même que cette autre; un mixte composé de 42 pouces cubes de matière, pèse 522 onces: des deux matières qui y entrent, l'une pèse 24 onces par pouce cube, & l'autre 6 onces. En suivant la règle précédente, on trouvera qu'il faut 15 pièces de 24 livres & 27 pièces de 6 livres.

La même règle serviroit encore à résoudre cette autre question. *Un pied cube d'eau de mer pèse 74 liv., un pied cube d'eau de pluie pèse 70 livres; combien faudroit-il mêler ensemble d'eau de mer & d'eau de pluie, pour faire de l'eau qui pesât 73 livres par pied cube?*

On voit par-là, combien il peut être utile de s'accoutumer de bonne heure à représenter, d'une manière générale, les quantités connues qui entrent dans les questions, & à interpréter ou traduire les résultats algébriques des solutions des problêmes.

Question troisième : *On a trois lingots dans chacun desquels il entre de l'or, de l'argent & du cuivre. L'alliage dans le premier est tel que sur 16 onces, il y en a 7 d'or, 8 d'argent & 1 de cuivre. Dans le second, sur 16 onces il y en a 5 d'or, 7 d'argent & 4 de cuivre. Dans le troisième, sur 16 onces il y en a 2 d'or, 9 d'argent & 5 de cuivre. On veut, en prenant différentes parties de ces trois alliages, composer un troisième lingot, tel que sur 16 onces, il s'en trouve 4 onces & $\frac{15}{16}$ en or, $7\frac{10}{16}$ en argent, & $3\frac{7}{16}$ en cuivre.*

Représentons par x le nombre d'onces qu'il faut prendre du premir lingot ; par y, le nombre d'onces qu'il faut prendre du second ; & enfin par z, le nombre d'onces qu'il faut prendre du troisième.

Puisque 16 onces du premier contiennent 7 onces d'or, on trouvera ce que x d'onces de ce même lingot peuvent contenir d'or, en calculant le quatrième terme de cette proportion $16 : 7 :: x :$; ce quatrième sera $\frac{7x}{16}$; par un raisonnement semblable, on trouvera qu'en prenant y d'onces du second lingot, on prend $\frac{5y}{16}$ en or, & sur le troisième $\frac{2z}{16}$. Ces trois quantités réunies font $\frac{7x+5y+2z}{16}$; or, on veut qu'elles fassent $4\frac{15}{16}$ ou $\frac{79}{16}$; donc $\frac{7x+5y+2z}{16} = \frac{79}{16}$.

Pour satisfaire à la seconde condition, on remarquera,

de même, qu'en prenant x d'onces sur le premier lingot, on prend nécessairement $\frac{8x}{16}$ d'onces en argent, sur le second $\frac{7y}{16}$, & enfin sur le troisième on prend nécessairement $\frac{9z}{16}$, ces trois quantités réunies font $\frac{8x+7y+9z}{16}$, & comme on veut qu'elles fassent $7\frac{10}{16}$ ou $\frac{122}{16}$, on aura $\frac{8x+7y+9z}{16} = \frac{122}{16}$.

En procédant de la même manière, on aura, pour satisfaire à la troisième condition, l'équation $\frac{x+4y+5z}{16} = \frac{55}{16}$.

Comme le nombre 16 est diviseur commun des deux membres de chacune des trois équations qu'on vient de trouver, on peut le supprimer, & alors on aura les trois équations suivantes. . . . . . . $7x + 5y + 2z = 79$, $8x + 7y + 9z = 122$, $x + 4y + 5z = 55$. Tirant de chacune, la valeur de x, on aura $x = \frac{79 - 5y - 2z}{7}$, $x = \frac{122 - 7y - 9z}{8}$, $x = 55 - 4y - 5z$; égalant la première valeur de x à la seconde & à la troisième (79), on aura $\frac{79 - 5y - 2z}{7} = \frac{122 - 7y - 9z}{8}$ & $\frac{79 - 5y - 2z}{7} = 55 - 4y - 5z$, équations qui ne renferment plus que deux inconnues, & qu'il faut, par conséquent, traiter selon ce qui a été dit (74).

Pour cet effet, je commence par faire disparoître les diviseurs, & j'ai $632 - 40y - 16z = 854 - 49y - 63z$, & $79 - 5y - 2z = 385 - 28y - 35z$, ou, en passant tous les y d'un côté, & réduisant, $9y = 222 - 47z$, & $23y = 306 - 33z$; la première de ces deux

équations donne $y = \frac{222 - 47z}{9}$; & la seconde, $y = \frac{306 - 33z}{23}$; égalant ces deux valeurs de y, j'ai $\frac{222 - 47z}{9} = \frac{306 - 33z}{23}$; chassant les diviseurs, $5106 - 1081z = 2754 - 297z$; transposant, $5106 - 2754 = 1081z - 297z$; réduisant, $2352 = 784z$; & enfin, en divisant, $z = \frac{2352}{784} = 3$.

Pour avoir la valeur de y, je substitue dans l'une des deux valeurs qu'on a trouvées ci-dessus pour y, j'y substitue, dis-je, au lieu de z, sa valeur 3 qu'on vient de trouver; par exemple, en substituant dans $y = \frac{222 - 47z}{9}$, j'ai $y = \frac{222 - 141}{9} = \frac{81}{9} = 9$.

Enfin, pour avoir x, je substitue, au lieu de y & de z, leurs valeurs 9 & 3 dans l'une des trois valeurs qu'on a trouvées ci-dessus pour x; par exemple, dans la dernière, savoir $x = 55 - 4y - 5z$, & cette valeur devient $x = 55 - 36 - 15 = 55 - 51 = 4$; c'est-à-dire, puisqu'on trouve $x = 4$, $y = 9$ & $z = 3$, qu'il faut prendre 4 onces du premier lingot, 9 du second, & 3 du troisième, & alors le nouveau lingot contiendra en or, 4 onces & $\frac{15}{16}$; en argent, 7 onces $\frac{10}{16}$; & en cuivre, 3 onces $\frac{7}{16}$.

En effet, puisque le premier lingot contient sur 16 onces, 7 onces d'or, 8 d'argent & 1 de cuivre; il est évident que si l'on prend 4 onces seulement de ce lingot, on aura $\frac{28}{16}$ d'once en or, $\frac{32}{16}$ en argent & $\frac{4}{16}$ en cuivre. Par une raison semblable, en prenant 9 onces du second lingot, on aura $\frac{45}{16}$ en or, $\frac{63}{16}$ en argent, & $\frac{36}{16}$ en cuivre, & en

prenant 3 onces du troisième lingot, on aura $\frac{6}{16}$ en or, $\frac{27}{16}$ en argent, & $\frac{15}{16}$ en cuivre.

Réunissant les trois quantités de chaque espèce de matière, provenantes des trois lingots, on aura $\frac{79}{16}$, $\frac{122}{16}$, $\frac{55}{16}$, ou $4\frac{15}{16}$, $7\frac{10}{16}$ & $3\frac{7}{16}$ pour les quantités d'or, d'argent & de cuivre qui entreront, en effet, dans le quatrième lingot.

Des cas où les questions proposées restent indéterminées, quoiqu'on ait autant d'Équations que d'inconnues ; & des cas où les questions sont impossibles.

87. Il arrive quelquefois que quoiqu'on ait autant d'équations que d'inconnues, la question qui a conduit à ces équations reste néanmoins indéterminée, c'est-à-dire, qu'elle est alors susceptible d'un nombre indéfini de solutions.

Ce cas a lieu lorsque quelques-unes des conditions, quoique différentes en apparence, se trouvent être les mêmes dans le fond. Alors les équations qui expriment ces conditions sont, ou des multiples les unes des autres, ou, en général, quelques-unes d'entre elles, sont composées d'une ou de plusieurs des autres, ajoutées ou soustraites, multipliées ou divisées par certains nombres. Par exemple, une question qui conduiroit à ces trois équations $5x + 3y + 2z = 17$, $8x + 2y + 4z = 20$, $18x$

$+ 8y + 8z = 54$, feroit fufceptible d'un nombre indéfini de folutions, quoiqu'il femble, d'après ce que nous avons vu plus haut, que x, y & z, ne peuvent avoir chacun qu'une feule valeur. De ces trois équations, la dernière eft compofée de la feconde ajoutée avec le double de la première. Or il eft évident que les deux premières étant une fois fuppofées avoir lieu, la troifième s'enfuit néceffairement; que par conféquent, elle n'exprime aucune nouvelle condition: on eft donc dans le même cas que fi l'on avoit feulement les deux premières équations: or nous verrons dans peu que lorfqu'on n'a que deux équations pour trois inconnues, chaque inconnue eft fufceptible d'un nombre indéfini de valeurs.

88. Le calcul fait toujours connoître les cas dont il s'agit ici: voici comment. Il n'y a qu'à procéder à la recherche des inconnues, felon les règles données ci-deffus: alors fi quelqu'une des équations eft comprife dans les autres, on arrivera dans le cours du calcul, à une équation *identique*, c'eft-à-dire, à une équation dans laquelle les deux membres feront non-feulement égaux, mais encore compofés de termes femblables & égaux: autant on trouvera d'équations identiques, autant il y aura d'équations inutiles parmi celles qui auront été propofées.

Par exemple, si de chacune des deux équations $6x + 8y = 12$ & $x + \frac{4}{3}y = 2$, je tire la valeur de x, j'aurai $x = \frac{12-8y}{6}$ & $x = 2 - \frac{4}{3}y$: égalant ces deux valeurs, j'aurai $\frac{12-8y}{6} = 2 - \frac{4}{3}y$, ou chassant les dénominateurs, $36 - 24y = 36 - 24y$, équation identique & qui ne peut faire connoître la valeur de y, parce qu'après la transposition & la réduction, on est conduit à cette équation $0 = 0$.

Pareillement, des trois équations précédentes (87) on tire $x = \frac{17-3y-2z}{5}$, $x = \frac{20-2y-4z}{8}$ & $x = \frac{54-8y-8z}{18}$, égalant la première de ces valeurs à la seconde & à la troisième, on aura $\frac{17-3y-2z}{5} = \frac{20-2y-4z}{8}$ & $\frac{17-3y-2z}{5} = \frac{54-8y-8z}{18}$; chassant les dénominateurs, transposant, réduisant & divisant, on aura, par la première, $y = \frac{36+4z}{14}$; & par la seconde, $y = \frac{36+4z}{14}$; valeurs qui étant égalées, donnent l'équation identique $\frac{36+4z}{14} = \frac{36+4z}{14}$: il n'y a donc, dans ce cas, que deux équations réellement distinctes.

Mais si l'on avoit les trois équations suivantes :

$$5x + 3y + 2z = 24$$
$$\frac{25}{2}x + \frac{15}{2}y + 5z = 60$$
$$15x + 9y + 6z = 72$$

La première donneroit $x = \frac{24-3y-2z}{5}$; la seconde, après avoir chassé les dénominateurs, transposé, réduit, &c. donneroit $x = \frac{120-15y-10z}{25}$; & la troisième, $x = \frac{72-9y-6z}{15}$. Égalant la première de ces valeurs à la seconde & à la troisième,

on auroit $\frac{24-3y-2z}{5}=\frac{120-15y-10z}{25}$ & $\frac{24-3y-2z}{5}=\frac{72-9y-6z}{15}$; & en chassant les dénominateurs, $600-75y-50z=600-75y-50z$, & $360-45y-30z=360-45y-30z$, équations identiques & dont on ne peut tirer ni y ni z, parce qu'elles se réduisent chacune à $0=0$. Il n'y a donc ici, à proprement parler, qu'une seule équation.

Les questions qui conduisent à de pareils résultats, sont indéterminées, mais ne sont pas impossibles. Nous verrons dans peu, comment on doit les traiter.

89. Dans les cas dont nous venons de parler, le numérateur & le dénominateur de chacune des valeurs des inconnues x, y, z, &c. que nous avons données (85), deviennent 0, ce qui doit être, ainsi qu'on peut le conclure facilement de ce que nous venons de dire. On peut donc, par le moyen de ces mêmes formules générales, reconnoître les cas où quelques-unes des équations seront comprises dans les autres.

90. Lorsqu'une question qui ne conduit qu'à des équations du 1er degré est impossible, on s'en apperçoit à ce que la suite du calcul conduit à une absurdité; par exemple, conduit à dire, $4=3$.

Si l'on avoit, par exemple, les deux équations

$$5x+3y=30$$
$$\&\ 20x+12y=135.$$

La première donneroit $x=\frac{30-3y}{5}$, & la seconde $x=\frac{135-12y}{20}$; égalant ces deux valeurs, on a $\frac{30-3y}{5}$

$= \frac{135-12y}{20}$; chaſſant les dénominateurs, on a $600 - 60y = 675 - 60y$ qui conduit à $600 = 675$, ce qui eſt abſurde ; donc la queſtion qui conduiroit aux deux équations $5x + 3y = 30$, & $20x + 12y = 135$, eſt impoſſible & abſurde.

91. Les ſolutions négatives indiquent auſſi une ſorte d'impoſſibilité dans la queſtion ; mais cette impoſſibilité n'eſt pas abſolue, elle eſt relative au ſens dans lequel les quantités ont été priſes ; enſorte qu'il y a un ſens dans lequel ces ſolutions ſont naturelles & admiſſibles ; voyez ce qui a été dit (70).

Des Problêmes indéterminés.

92. On appelle *Problême indéterminé*, toute queſtion à laquelle on peut ſatisfaire en pluſieurs manières, ſans pouvoir déterminer parmi toutes ces manières, quelle eſt celle qui donne lieu à la queſtion. Ces ſortes de problêmes ont toujours moins de conditions que d'inconnues ; & enviſagés généralement, ils ſont ſuſceptibles d'une infinité de ſolutions ; mais il arrive ſouvent auſſi que le nombre de ces ſolutions eſt limité par quelques conditions qui ne pouvant pas être réduites en équations, ne permettent pas de déterminer d'une manière directe le nombre des ſolutions que la queſtion peut avoir.

Si l'on propoſoit cette queſtion : *Trouver deux*

nombres qui pris ensemble fassent 24; en nommant x l'un de ces nombres, & y l'autre, on auroit $x+y = 24$, équation de laquelle on tire $x = 24 - y$. Or cette question est susceptible d'une infinité de solutions, si par x & y on entend indifféremment des nombres entiers ou des nombres fractionnaires, & des nombres positifs ou négatifs : il suffit, pour y satisfaire, de prendre pour y tel nombre qu'on voudra, & de conclure la valeur de x de l'équation $x = 24 - y$, en y substituant pour y le nombre qu'on aura pris arbitrairement; ainsi si l'on suppose successivement $y = 1$, $y = 1\frac{1}{2}$, $y = 2$, $y = 2\frac{2}{3}$, &c., on aura $x = 23$, $x = 22\frac{1}{2}$, $x = 22$, $x = 21\frac{1}{3}$, &c. Mais si l'on ne veut que des nombres entiers & positifs, alors le nombre des solutions est limité; car pour que x soit positif, il faut que y ne soit pas plus grand que 24. Et puisqu'on ne veut que des nombres entiers, il est évident que l'équation ne peut avoir en tout que 25 solutions en y comprenant 0 : ensorte que supposant successivement $y = 0$, $y = 1$, $y = 2$, $y = 3$, &c., on aura $x = 24$, $x = 23$, $x = 22$, $x = 21$, &c.

93. Mais, lorsqu'on impose la condition que les nombres demandés soient des nombres entiers & positifs, on ne voit pas toujours aussi facilement que dans l'exemple précédent, comment on peut

satisfaire à cette condition : les questions suivantes sont propres à le faire connoître.

Question première. *On demande en combien de manières on peut payer 542 livres, en donnant des pièces de 17 liv. & recevant en échange des pièces de 11 livres.*

Représentons par x le nombre des pièces de 17 liv., & par y celui des pièces de 11 liv.; en donnant x pièces de 17 liv. on paiera x fois 17 liv. ou $17x$: en recevant y pièces de 11 liv. on recevra $11y$; par conséquent, on aura payé $17x - 11y$; & puisqu'on veut payer 542 liv. on aura $17x - 11y = 542$. Tirons la valeur de y, c'est-à-dire, de l'inconnue qui a le moindre coëfficient, & nous aurons $y = \frac{17x - 542}{11}$.

Comme on n'a que cette équation, on voit qu'en mettant arbitrairement pour x tel nombre qu'on voudra, on aura pour y une valeur qui satisfera sûrement à l'équation; mais comme la question exige que x & y soient des nombres entiers, voici comment il faut s'y prendre pour y parvenir directement.

La valeur de $y = \frac{17x - 542}{11}$ se réduit, en faisant la division autant qu'il est possible, à $y = x - 49 + \frac{6x - 3}{11}$; il faut donc que $\frac{6x - 3}{11}$ soit un nombre entier : soit u ce nombre entier; on aura $\frac{6x - 3}{11} = u$, & par conséquent $6x - 3 = 11u$ & $x = \frac{11u + 3}{6}$, ou, en faisant la division, $x = u + \frac{5u + 3}{6}$; il faut donc que $\frac{5u + 3}{6}$ fasse un nombre entier : soit t ce nombre entier; on aura

$\frac{5u+3}{6} = t$, & par conséquent $5u + 3 = 6t$ & $u =$ $\frac{6t-3}{5} = t + \frac{t-3}{5}$; il faut donc que $\frac{t-3}{5}$ fasse un nombre entier : soit s ce nombre entier, on aura $\frac{t-3}{5} = s$, & par conséquent $t = 5s + 3$: l'opération est terminée ici, parce qu'il est évident qu'en prenant pour s tel nombre entier qu'on voudra, on aura toujours pour t un nombre entier tel que l'exige la question, puisqu'il n'y a plus de dénominateur.

Remontons maintenant aux valeurs de x & y : puisqu'on a trouvé $u = \frac{6t-3}{5}$; en mettant pour t sa valeur $5s + 3$, on aura $u = \frac{30s+18-3}{5} = 6s + 3$: & puisqu'on a trouvé $x = \frac{11u+3}{6}$, en mettant pour u sa valeur, on aura $x = \frac{66s+33+3}{6} = 11s + 6$: enfin, puisqu'on a trouvé $y = \frac{17x-542}{11}$, en substituant pour x sa valeur, on aura $y = \frac{187s+102-542}{11} = 17s - 40$; ainsi les valeurs correspondantes de x & de y sont $x = 11s + 6$, & $y = 17s - 40$. Par la première, on est libre de prendre pour s tel nombre entier qu'on voudra ; mais la seconde ne permet pas de prendre s plus petit que 3 ; en effet y devant être positif, il faut que $17s$ soit plus grand que 40, ou que s soit plus grand que $\frac{40}{17}$, c'est-à-dire, plus grand que 2.

On peut donc satisfaire à cette question d'une infinité de manières différentes, qu'on aura toutes en mettant dans les valeurs de x & de y, au lieu de s, tous les nombres entiers positifs imaginables depuis 3 jusqu'à l'infini : ainsi

posant successivement $s = 3$, $s = 4$, $s = 5$, $s = 6$, $s = 7$, &c., on aura les valeurs correspondantes de x & de y comme il suit :

$$\begin{aligned} x &= 39 \ldots\ldots y = 11 \\ &= 50 \qquad\quad = 28 \\ &= 61 \qquad\quad = 45 \\ &= 72 \qquad\quad = 62 \\ &= 83, \text{\&c.} \quad = 79 \end{aligned}$$

Dont chacune est telle qu'en donnant le nombre de pièces de 17 liv. désigné par x, & recevant le nombre correspondant de pièces de 11 liv. désigné par y, on paiera 542 livres.

Question seconde. *Faire 741 liv. en 41 pièces de trois espèces ; savoir, de 24 liv., de 19 liv. & de 10 livres.*

Soient x, y & z les nombres de pièces de chacune de ces trois espèces ; puisqu'on veut en tout 41 pièces, on aura, 1°. $x + y + z = 41$.

2°. Chaque pièce de la première espèce valant 24 liv., le nombre x de pièces vaudra x fois 24 liv. ou $24x$; par la même raison y pièces de la seconde espèce vaudront $19y$, & z pièces de la troisiéme espèce vaudront $10z$; ainsi les valeurs réunies des trois nombres de pièces différentes, monteront à $24x + 19y + 10z$; & comme elles doivent monter à 741 livres, on aura $24x + 19y + 10z = 741$.

Je prends, dans chacune de ces équations, la valeur d'une même inconnue, peu importe laquelle ; de x, par exemple, & j'ai $x = 41 - y - z$, & $x = \frac{741 - 19y - 10z}{24}$; j'égale ces deux valeurs, & j'ai $41 - y - z = \frac{741 - 19y - 10z}{24}$,

ou chaſſant le dénominateur, $984 - 24y - 24z = 741 - 19y - 10z$; transpoſant & réduiſant, on a $243 = 5y + 14z$.

Je prends maintenant la valeur de y qui a le plus petit coëfficient, & j'ai $y = \frac{243 - 14z}{5} = 48 - 2z + \frac{3 - 4z}{5}$, or y & z devant être des nombres entiers, il faut que $\frac{3 - 4z}{5}$ ſoit un nombre entier : ſoit donc t ce nombre entier ; on aura $\frac{3 - 4z}{5} = t$, ou $3 - 4z = 5t$; donc $z = \frac{3 - 5t}{4} = -t + \frac{3 - t}{4}$; il faut donc que $\frac{3 - t}{4}$ ſoit un nombre entier : ſoit u ce nombre ; on aura $\frac{3 - t}{4} = u$, ou $3 - t = 4u$, & par conſéquent $t = 3 - 4u$.

Remontons maintenant aux valeurs de y, z & x.

Puiſqu'on vient de trouver $z = \frac{3 - 5t}{4}$, on aura en mettant pour t ſa valeur, $z = \frac{3 - 15 + 20u}{4} = \frac{20u - 12}{4} = 5u - 3$; & puiſqu'on a trouvé $y = \frac{243 - 14z}{5}$; en mettant pour z, ſa valeur, on aura $y = \frac{243 - 70u + 42}{5} = \frac{285 - 70u}{5} = 57 - 14u$.

Enfin, puiſqu'on a trouvé $x = 41 - y - z$, on aura $x = 41 - 57 + 14u - 5u + 3 = 9u - 13$. Enſorte que les valeurs correſpondantes de x, y & z, ſont $x = 9u - 13$, $y = 57 - 14u$, & $z = 5u - 3$, dans leſquelles on peut mettre pour u, tel nombre entier qu'on voudra, pourvu qu'il en réſulte des nombres poſitifs pour

x, y & z : or cette condition emporte ces trois autres. 1°. Que $9u$ soit plus grand que 13 ; ou que u soit plus grand que $\frac{13}{9}$ ou $1\frac{4}{9}$. 2°. Que 57 soit plus grand que $14u$, ou que u soit plus petit que $\frac{57}{14}$; c'est-à-dire, plus petit que $4\frac{1}{14}$. 3°. Enfin que $5u$ soit plus grand que 3, ou u plus grand que $\frac{3}{5}$, ce qui ne peut manquer d'arriver, dès qu'on observera la première condition : ainsi le nombre des solutions est donc très-limité, & se réduit à trois que l'on trouve, en donnant à u pour valeurs les nombres 2, 3 & 4, qui sont les seuls que l'état de la question admette. On ne peut donc faire 741 liv. en 41 pièces des trois espèces proposées, qu'en prenant les nombres de pièces marquées ci-dessous, & qu'on trouve, en mettant pour u, les nombres 2, 3 & 4, successivement dans chacune des valeurs de x, y & z.

x	y	z
5	29	7
14	15	12
23	1	17

Dans le cours des divisions que l'on fait pour réduire la valeur de l'indéterminée à un nombre entier, rien n'oblige à prendre le quotient plutôt au-dessous de sa véritable valeur, qu'au-dessus. Il est même quelquefois plus expéditif de le prendre de cette dernière manière.

Par exemple, si j'avois l'équation $19y = 52x + 139$, au lieu d'en conclure $y = 2x + 7 + \frac{14x + 6}{19}$ en prenant $2x$ pour valeur du quotient de $52x$ divisé par 19, en nombres entiers, je conclurois $y = 3x + 7 \frac{-5x + 6}{19}$ en prenant plutôt $3x$ pour quotient, parce que ce quotient est plus approchant, & que l'excédent $5x$ dont je

tiens compte en lui donnant le ſigne —, a un coëfficient plus petit, ce qui ne peut manquer d'abréger le calcul. Je fais enſuite $\frac{-5x+6}{19}=u$; & j'en conclus $x=\frac{6-19u}{5}$, & par la même raiſon, $x=1-4u+\frac{1+u}{5}$. Faiſant $\frac{1+u}{5}=t$, j'ai enfin $u=5t-1$; ce qui achève la ſolution plus promptement que ſi j'avois pris chaque quotient au-deſſous de ſa véritable valeur. Si on remonte, comme ci-deſſus, aux valeurs de x & de y, on trouvera $x=5-19t$, & $y=21-52t$, qui en donnant à t pour valeurs, tous les nombres négatifs depuis zéro, donneront toutes les ſolutions poſitives de l'équation.

Des Équations du ſecond degré à une ſeule inconnue.

94. On appelle *Équations du ſecond degré*, celles dans leſquelles la plus haute puiſſance de l'inconnue, eſt cette même inconnue multipliée par elle-même, ou élevée à ſon quarré. Ainſi l'équation $5x^2=125$, eſt une équation du ſecond degré, parce que dans le terme, $5x^2$ la quantité x eſt multipliée par elle-même.

95. Lorſque l'équation ne renferme d'autre puiſſance de l'inconnue, que le quarré, elle eſt toujours facile à réſoudre : il ſuffit de dégager le quarré de l'inconnue, de tout ce qui peut le multiplier, ou le diviſer, ou des quantités qui peuvent ſe trouver

trouver jointes avec lui, par les signes + ou —, ce qui se fait par les règles données (56, 60 & 64); après quoi il n'y a plus qu'à tirer la racine quarrée de chaque membre.

Par exemple, de l'équation $5x^2 = 125$, je conclus, en divisant par 5, $x^2 = \frac{125}{5} = 25$, & tirant la racine quarrée de chaque membre, $x = 5$: car il est évident que si deux quantités sont égales, leurs racines quarrées seront aussi égales, & il est également clair que x est la racine quarrée de x^2.

Pareillement si j'ai l'équation $\frac{5}{3}x^2 = \frac{4}{5}x^2 + 7$; je chasse les fractions, & j'ai $25x^2 = 12x^2 + 105$; transposant, $25x^2 - 12x^2 = 105$, ou $13x^2 = 105$; divisant par 13, $x^2 = \frac{105}{13}$; donc $x = \sqrt{\frac{105}{13}}$.

Ce signe $\sqrt{}$ marque qu'on doit tirer la racine quarrée. Lorsqu'on doit tirer la racine quarrée de la fraction, comme dans le cas présent, on fait descendre les jambes du signe $\sqrt{}$ (qu'on appelle *signe radical*), au-dessous de la barre qui sépare les deux termes de la fraction. Mais si l'on n'avoit à représenter que la racine quarrée de l'un ou de l'autre des deux termes de la fraction, le radical seroit tout entier au-dessus ou au-dessous de la barre de division; ainsi pour marquer qu'on veut diviser par 3, la racine quarrée de 40, on écriroit $\frac{\sqrt{40}}{3}$.

Si la quantité dont on doit tirer la racine quarrée, étoit complexe, on donneroit, au radical, une queue

qui recouvrît toute la quantité; par exemple, pour marquer la racine quarrée de $3ab + b^2$, on écriroit $\sqrt{3ab + b^2}$. Quelquefois aussi, sans donner une queue au radical, on renferme la quantité complexe, entre deux crochets, qu'on fait précéder du signe $\sqrt{}$, en cette manière $\sqrt{}(3ab + b^2)$.

96. Nous avons vu (24) que lorsque le multiplicande & le multiplicateur avoient tous deux le même signe, le produit avoit toujours le signe $+$; cela étant, lorsqu'on a à tirer la racine quarrée d'une quantité qui a le signe $+$, on doit indifféremment donner à cette racine quarrée le signe $+$ ou le signe $-$; ainsi dans l'équation précédente $x^2 = 25$, on peut, lorsqu'on tire la racine quarrée, dire également, qu'elle est $+5$, & qu'elle est -5, parce que chacun de ces nombres multiplié par lui-même reproduit toujours $+25$; ensorte que la résolution de l'équation $x^2 = 25$ s'écrit ainsi $x = \pm 5$, ce qui se prononce en disant *x égale plus ou* moins 5, & équivaut à ces deux équations $x = +5$ & $x = -5$.

Pareillement pour la seconde équation ci-dessus, on écriroit $x = \pm \sqrt{\frac{105}{13}}$ (*).

(*) On pourroit demander ici pourquoi nous ne donnons pas aussi le double signe $\pm$ au premier membre? La réponse est, qu'on le peut; mais cela ne mène à rien de nouveau. En

97. Lorſqu'on a à tirer la racine quarrée d'une quantité précédée du ſigne —, on couvre le tout, du radical, que l'on fait auſſi précéder du double ſigne $\pm$; ainſi ſi l'on avoit $x^2 = -4$, on écriroit $x = \pm\sqrt{-4}$; & quoiqu'on puiſſe tirer la racine quarrée de 4, qui eſt 2, il ne faudroit pas écrire $x = \pm 2$: il eſt eſſentiel ici de faire attention au ſigne — de la quantité qui eſt ſous le radical.

98. Lorſqu'une équation conduit ainſi à tirer la racine quarrée d'une quantité négative, on peut conclure que le problême qui a conduit à cette équation eſt impoſſible : en effet une quantité négative ne peut avoir de racine quarrée, ni exactement, ni par approximation; car il n'y a aucune quantité ſoit poſitive, ſoit négative, qui étant multipliée par elle-même puiſſe produire une quantité négative : il eſt bien vrai que — 4, par exemple, peut être conſidéré comme venant de + 2 multiplié

effet ſi l'on écrit $\pm x = \pm 5$, on en tire ces quatre équations $+x = +5$, $+x = -5$, $-x = +5$ $-x = -5$. La dernière, en changeant les ſignes, revient à la première, il en eſt de même de la troiſième, relativement à la ſeconde.

Il faut ſe garder de conſidérer la valeur de x dans la première équation $x = 5$, comme étant la même que dans la ſeconde $x = -5$, quoique ces deux valeurs ſoient exprimées par le même caractère ou la même lettre x, cette lettre x eſt un ſigne par lequel on repréſente la quantité que l'on cherche; il peut déſigner des quantités différentes, comme le mot *Écu* déſigne des quantités différentes, dans différens pays.

par — 2 ; mais ces deux quantités ayant un ſigne différent, ne ſont point égales, & par conſéquent leur produit n'eſt pas un quarré. Ainſi, lorſqu'on propoſe de tirer la racine quarrée d'une quantité négative, on propoſe une choſe abſurde ; donc tout problême qui ſe réduira à une pareille opération, ſera un problême impoſſible. C'eſt à ce caractère qu'on diſtingue l'impoſſibilité des queſtions du ſecond degré.

Au reſte, il ne faut pas pour cela, regarder, comme inutile, la conſidération des racines quarrées des quantités négatives : il arrive aſſez ſouvent qu'une queſtion quoique poſſible n'admet de ſolution que par le concours de pareilles quantités dans leſquelles à la fin, ce qu'il y a d'abſurde, diſparoît. On appelle ces ſortes de quantités, *quantités imaginaires*. Ainſi $\sqrt{-a}$ eſt une quantité imaginaire; $a + \sqrt{-b}$ eſt une quantité imaginaire.

99. Ce que nous venons de dire ſuffit pour la réſolution des équations du ſecond degré, lorſqu'il n'y a pas d'autres puiſſances de x que le quarré. Mais outre le quarré de l'inconnue, il peut encore y avoir (& cela arrive le plus ſouvent) la première puiſſance de l'inconnue multipliée ou diviſée par quelque quantité connue, comme dans cette équation $x^2 - 4x = 12$. Alors l'artifice qu'on doit employer pour

résoudre l'équation, consiste à préparer le premier membre de manière à en faire un quarré parfait : cette préparation suppose, avant tout, trois choses; 1°. qu'on ait passé dans un seul membre tous les termes affectés de x, & les quantités connues dans l'autre; cela s'exécute par ce qui a été dit (56) : 2°. Que le terme qui renferme x^2, soit positif; s'il avoit le signe —, on changeroit tous les signes de l'équation, ce qui ne troubleroit point l'égalité : 3°. Que le terme qui renferme x^2, soit libre de tout multiplicateur ou de tout diviseur; s'il n'étoit point dans cet état, on l'y améneroit, en multipliant tous les autres termes de l'équation par ce diviseur, & en les divisant par le multiplicateur.

Par exemple, si j'avois à résoudre l'équation $4x - \frac{3}{5}x^2 = 4 - 2x$, 1°. je passerois tous les x dans le premier membre, en écrivant le terme x^2 le premier, & j'aurois $-\frac{3}{5}x^2 + 4x + 2x = 4$, ou $-\frac{3}{5}x^2 + 6x = 4$; 2°. je changerois les signes pour rendre x^2 positif, & j'aurois $\frac{3}{5}x^2 - 6x = -4$; 3°. je multiplierois par 5, ce qui me donneroit $3x^2 - 30x = -20$; enfin je diviserois par 3, & j'aurois $x^2 - 10x = -\frac{20}{3}$.

Comme on peut toujours ramener, à cet état, toute équation du second degré, nous ne nous occuperons actuellement que d'une équation préparée de cette manière.

100. Cela posé, pour résoudre une équation du second degré, il faut suivre cette règle :

Prenez la moitié de la quantité connue qui multiplie x *dans le second terme : élevez cette moitié au quarré, & ajoutez ce quarré à chaque membre de l'équation, ce qui ne changera rien à l'égalité. Le premier membre sera alors un quarré parfait. Tirez la racine quarrée de chaque membre, & faites précéder celle du second membre, du double signe* $\pm$ *; l'équation sera réduite au premier degré.*

Quant à la manière de tirer la racine quarrée du premier membre, on tirera la racine quarrée du quarré de l'inconnue, & celle du quarré qu'on a ajouté : on joindra cette seconde à la première, par le signe qu'aura le second terme de l'équation.

Par exemple, ayant l'équation $x^2 + 6x = 16$, je prends la moitié de la quantité connue 6, qui multiplie x dans le second terme : je quarre cette moitié, & j'ajoute à chaque membre le quarré 9 ; j'ai $x^2 + 6x + 9 = 25$; il ne s'agit plus que de tirer la racine quarrée, ce que je fais en prenant la racine quarrée de x^2 qui est x, puis celle de 9 qui est 3 ; & comme le second terme $6x$ de l'équation a le signe $+$, j'en conclus que $x + 3$, est la racine quarrée du premier membre ; quant à celle du second, elle est 5 ou plutôt (96) ± 5 ; par conséquent $x + 3 = \pm 5$. Pour avoir x, il ne s'agit plus que de transposer, & l'on aura $x = \pm 5 - 3$; c'est-à-dire, que x a deux valeurs ; savoir $x = + 5 - 3 = 2$, & $x = - 5 - 3 = - 8$. Nous verrons ci-après ce que signifie cette seconde valeur.

Pour entendre la raison de cette règle, il faut se rappeler ce que nous avons remarqué (25),

ſavoir que le quarré d'une quantité compoſée de deux termes, contient toujours le quarré du premier terme, le double du premier terme multiplié par le ſecond, & le quarré du ſecond.

Cela poſé, lorſqu'il s'agit d'ajouter à une quantité telle que $x^2 + 6x$, ce qui eſt néceſſaire pour en faire un quarré parfait, il faut remarquer 1°. que cette quantité contient déjà un quarré x^2 qu'on peut conſidérer comme le quarré du premier terme x d'un binome. 2°. Qu'on peut toujours conſidérer le terme ſuivant $6x$, comme étant le double de x multiplié par une autre quantité. 3°. Que cette autre quantité eſt néceſſairement la moitié de 6 multiplicateur de x. Il ne manque donc plus que le quarré de cette ſeconde quantité, c'eſt-à-dire, le quarré de la moitié du multiplicateur de x dans le ſecond terme. On voit que ce raiſonnement eſt général, quel que ſoit le multiplicateur de x.

Quant à la règle que nous donnons en même temps pour extraire la racine quarrée du premier membre, elle eſt également une ſuite de la formation du quarré ; puiſque les deux quarrés extrêmes qui ſe trouvent dans le quarré d'un binome étant les quarrés des deux termes de la racine, il eſt évident qu'il ne s'agit que de tirer ſéparément les racines de ces deux quarrés, pour avoir ces deux

termes. Mais on doit donner au ſecond terme de la racine le même ſigne qu'a le ſecond terme de l'équation, parce que de même que le calcul fait voir que le quarré de $a + b$ eſt $a^2 + 2ab + b^2$, de même il fait voir que le quarré de $a - b$ eſt $a^2 - 2ab + b^2$.

Application de la Règle précédente, à la Réſolution de quelques queſtions du ſecond degré.

101. De quelque degré que doive être l'équation, il faut toujours, pour mettre la queſtion en équation, faire uſage de la règle que nous avons donnée (67).

Queſtion première: *Trouver un nombre tel que ſi à ſon quarré, on ajoute 8 fois ce même nombre, le tout faſſe* 33?

Si je connoiſſois ce nombre, que j'appelle x, il eſt évident que j'en prendrois le quarré x^2; qu'à ce quarré, j'ajouterois 8 fois ce nombre, c'eſt-à-dire, $8x$, & que le tout $x^2 + 8x$ formeroit 33; il faut donc que $x^2 + 8x = 33$.

Pour réſoudre cette équation, j'ajoute à chaque membre le nombre 16, qui eſt le quarré de la moitié du nombre 8 qui multiplie x dans le ſecond terme, & j'ai $x^2 + 8x + 16 = 49$; équation dont le premier membre eſt un quarré parfait. Je tire la racine quarrée de chaque membre, en obſervant la règle donnée (100), & j'ai $x + 4 = \pm 7$; par conſéquent $x = \pm 7 - 4$, qui donne ces deux valeurs de x, $x = + 7 - 4 = 3$, & $x = - 7 - 4 = - 11$.

De ces deux valeurs, la première satisfait à la question, puisque 9 qui est le quarré de 3, étant ajouté à 8 fois 3 ou 24, fait 33. A l'égard de la seconde, comme elle est négative, elle indique qu'il y a une autre question dans laquelle prenant x dans un sens tout contraire, la solution seroit 11 ; c'est-à-dire, que la seconde valeur de x doit satisfaire à cette autre question : *Trouver un nombre tel que si de son quarré, on retranche* 8 *fois ce même nombre, le reste soit* 33 : ce qui est en effet, car le quarré de 11 est 121, & 8 fois 11 font 88, lesquels retranchés de 121, il reste 33.

Pour confirmer ce que nous avons dit sur les quantités négatives (70), remarquons que cette seconde question mise en équation, donne $x^2 - 8x = 33$, laquelle étant résolue selon la règle, donne $x = \pm 7 + 4$; c'est-à-dire, ces deux valeurs $x = 11$ & $x = -3$, qui sont précisément le contraire de celles de la première question.

102. On voit par-là qu'une équation du second degré, à une seule inconnue, a toujours deux solutions. Car les deux valeurs 11 & -3 substituées, au lieu de x, dans l'équation $x^2 - 8x = 33$, la résolvent également, c'est-à-dire, réduisent également le premier membre à 33. On vient de le voir pour 11. A l'égard de -3, son quarré est $+9$; & 8 fois -3, font -24, qui, retranchés de $+9$, donnent $+9+24$, selon ce qui a été enseigné (11).

Mais on voit en même temps que si toute équation du second degré a deux solutions, il n'en est pas toujours de même de la question qui a conduit à cette équation ; car, dans le cas présent, la seconde valeur -3, ne résout que la question contraire. Au reste ; il arrive souvent que les deux solutions de l'équation, sont aussi toutes deux, solutions de la question. Nous en verrons un exemple dans la troisième question.

Question seconde. *On devoit partager 175 livres entre un certain nombre de personnes; mais il y en a deux d'absentes & qui, par cette raison, ne doivent pas avoir part. Cette circonstance augmente de 10 livres la part de chaque présent; on demande combien il devoit d'abord y avoir de partageans.*

Si je savois quel est ce nombre, je diviserois 175 par ce nombre, pour connoître combien chacun auroit eu, si toutes les personnes eussent été présentes. Je diviserois ensuite par ce même nombre diminué de 2, pour connoître combien chaque partageant aura réellement; enfin je verrois si en ôtant 10 livres de ce second quotient, le reste est égal au premier. Imitons ces opérations, en représentant par x le nombre cherché.

Si tous étoient présens, chacun auroit donc $\frac{175}{x}$; mais s'il manque deux personnes, chaque partageant aura $\frac{175}{x-2}$; puis donc que ce dernier nombre doit être plus grand de 10, que le premier, il faut que $\frac{175}{x-2} - 10 = \frac{175}{x}$.

Pour résoudre cette équation, je chasse les dénominateurs; & selon la remarque faite (66), j'écris $175x - 10x \times (x-2) = 175 \times (x-2)$, puis faisant les opérations indiquées, j'ai $175x - 10xx + 20x = 175x - 350$; supprimant $175x$ de part & d'autre: puis changeant les signes (99), on a $10xx - 20x = 350$; enfin divisant par 10, il vient $xx - 2x = 35$, équation à laquelle il ne s'agit plus que d'appliquer la règle donnée (100). Je prends donc la moitié -1 du multiplicateur -2 de x. Je quarre cette moitié; ce qui me donne $+1$, que j'ajoute à chaque membre, & j'ai $x^2 - 2x + 1 = 36$; tirant la racine quarrée, j'ai $x - 1 = \pm 6$, & par conséquent $x = \pm 6 + 1$, qui donne $x = 7$ &

$x = -5$. La première est le nombre cherché : car 175 divisé par 7, donne 25 ; & 175 divisé par $7 - 2$ ou 5, donne 35 qui excède 25 de 10. Quant à la seconde, elle résout la question où l'on supposeroit qu'il s'agit de partager 175 livres avec deux nouveaux survenus, & que cette circonstance diminue de 10 livres la part que chacun auroit eu sans cela.

Question troisième. *Un homme achète un cheval, qu'il vend, au bout de quelque temps, pour 24 pistoles. A cette vente, il perd autant pour cent que le cheval lui avoit coûté. On demande combien il l'avoit acheté?*

Si l'on me disoit ce que le cheval a coûté, je vérifierois ce nombre en cette manière. Je le retrancherois de 100, & je ferois cette règle de trois : Si 100 se réduisent au nombre que vient de me donner la soustraction, à combien le nombre prétendu doit-il se réduire ? Ayant trouvé ce quatrième terme, il devroit être égal à 24.

Nommons donc x le nombre cherché, c'est-à-dire, le nombre de pistoles que le cheval a coûté. Alors puisque 100 sont supposés se réduire à $100 - x$; je trouverai à combien x doit être réduit, en faisant cette règle de trois, $100 : 100 - x :: x :$; le quatrième terme sera $\frac{(100 - x)x}{100}$ (*Arith.* 179) ou $\frac{100x - xx}{100}$; puis donc qu'on suppose que le prix du cheval a été réduit à 24 pistoles, il faut que $\frac{100x - xx}{100} = 24$.

Pour résoudre cette équation, je chasse le dénominateur, & j'ai $100x - xx = 2400$, ou en changeant les signes $xx - 100x = -2400$. Je prends donc (100) la moitié de -100 qui est -50 ; je l'élève au quarré, ce qui me

donne $+ 2500$ à ajouter à chaque membre. L'équation devient $xx - 100x + 2500 = 2500 - 2400 = 100$; tirant la racine quarrée, j'ai $x - 50 = \pm 10$, & par conſéquent, $x = 50 \pm 10$, qui donne ces deux valeurs $x = 60$ & $x = 40$, dont chacune réſout la queſtion; enſorte que le prix du cheval peut également avoir été de 60 ou de 40 piſtoles; l'énoncé de la queſtion n'eſt pas ſuffiſant pour déterminer lequel de ces deux prix a eu lieu. Si l'on veut vérifier ces deux ſolutions, on verra qu'en ſuppoſant que le cheval a été acheté 60 piſtoles, puiſqu'alors 100 ſe réduiſent à 40, 60 ſe réduiront à 24. Et dans le ſecond cas, on verra de même, que 100 ſe réduiſant à 60, 40 ſe réduiront à 24.

103. Dans les queſtions précédentes, l'équation a eu deux ſolutions, l'une poſitive, l'autre négative. Dans la dernière, elle en a deux poſitives. Elle peut en avoir auſſi deux négatives. Mais cela n'arrive que lorſque l'énoncé de la queſtion eſt vicieux; car alors chacune de ces deux ſolutions négatives, indique (70) que l'inconnue doit être priſe dans un ſens tout oppoſé à celui de l'énoncé. Par exemple, ſi l'on propoſoit cette queſtion; Trouver un nombre tel que ſi à ſon quarré on ajoute neuf fois ce même nombre, & encore le nombre 50, le tout faſſe 30; cette queſtion miſe en équation donneroit $x^2 + 9x + 50 = 30$, qui en ſuivant les règles données plus haut, deviendroit ſucceſſivement $x^2 + 9x = -20$, $x^2 + 9x + \frac{81}{4} = \frac{81}{4} - 20 = \frac{1}{4}$; tirant la racine quarrée $x + \frac{9}{2} = \pm \frac{1}{2}$, qui donne $x = -\frac{9}{2} + \frac{1}{2} = -4$, & $x = -\frac{9}{2} - \frac{1}{2} = -5$. Ce qui indique que la queſtion doit être changée en cette autre : Trouver un nombre tel que ſi après avoir ajouté 50 à ſon quarré, on retranche du tout, 9 fois ce même nombre demandé, il reſte 30.

104. L'Algèbre a donc cet avantage, que non-seulement elle résout les questions, mais elle fait encore distinguer si elles sont bien ou mal proposées; & si elles sont impossibles, elle le fait connoître aussi: nous en avons déjà donné le caractère (98).

Si l'on en veut un exemple, il n'y a qu'à résoudre la question troisième; en y supposant vingt-six pistoles au lieu de vingt-quatre. L'équation sera $\frac{100x - xx}{100} = 26$, ou $100x - xx = 2600$, ou $xx - 100x = -2600$, qui, selon la règle (100), devient $xx - 100x + 2500 = 2500 - 2600 = -100$, tirant la racine quarrée $x - 50 = \pm \sqrt{-100}$, & enfin $x = 50 \pm \sqrt{-100}$; or nous avons vu (98) que la racine quarrée d'une quantité négative est impossible.

Question quatrième. *Deux personnes se sont réunies dans un commerce: l'une a mis 30 louis qui ont resté 17 mois dans la société. Le second n'a fourni ses fonds qu'au bout de 5 mois; c'est-à-dire, qu'ils n'ont été que 12 mois dans la société. Ces fonds que l'on ne connoît point, font, avec le gain qui lui revient, 26 louis. Le gain total a été de 18 louis & $\frac{3}{4}$; on demande ce que le second avoit mis, & combien chacun a gagné?*

La question se réduit à trouver la mise du second; car il est évident que le gain de chacun sera facile à trouver ensuite. Représentons cette mise, ou le nombre de louis de cette mise, par x. Puisque les 30 louis du premier ont été 17 mois dans la société, ils doivent lui avoir produit autant que produiroient 17 fois 30 louis ou 510 louis pendant un mois. Pareillement, puisque la mise x du second a été 12 mois dans la société, elle doit lui avoir produit autant que

12 fois x de louis ou $12x$ produiroient pendant un mois ; ainsi, on peut regarder la société, comme n'ayant duré qu'un mois, mais en supposant que les mises aient été 510 & $12x$; cela étant, pour savoir ce que le second doit gagner, il faut (*Arith.* 197) calculer le quatrième terme de cette proportion $510 + 12x : 18\frac{3}{4} :: 12x :$

Ce quatrième terme sera $\frac{12x \times 18\frac{3}{4}}{510 + 12x}$, qui revient à $\frac{225x}{510 + 12x}$; or il est dit dans la question que le gain du second & sa mise x font 26 louis ; donc $\frac{225x}{510 + 12x} + x = 26$.

Pour résoudre cette équation, chassons le dénominateur, & nous aurons $225x + x(510 + 12x) = 26\,(510 + 12x)$, ou, en faisant les multiplications indiquées, $225x + 510x + 12xx = 13260 + 312x$. Transposant & réduisant, on a $12xx + 423x = 13260$; divisant par 12, $x^2 + \frac{423}{12}x = \frac{13260}{12}$ qui se réduit à $x^2 + \frac{141}{4}x = 1105$; prenant donc la moitié de $\frac{141}{4}$, qui est $\frac{141}{8}$; élevant cette moitié au quarré, & l'ajoutant à chaque membre, on aura $x^2 + \frac{141}{4}x + \frac{19881}{64} = \frac{19881}{64} + 1105 = \frac{90601}{64}$, en réduisant 1105 en fraction. Tirant donc la racine quarrée, on aura $x + \frac{141}{8} = \pm\sqrt{\frac{90601}{64}} = \pm\frac{301}{8}$; donc $x = -\frac{141}{8} \pm \frac{301}{8}$; qui donne pour la seule valeur, qui satisfasse à la question, $x = \frac{-141 + 301}{8} = \frac{160}{8} = 20$; la mise du second étoit donc de 20 louis ; par conséquent son gain étoit de 6, & celui du premier de $12\frac{3}{4}$.

105. A l'égard des équations littérales, la règle est absolument la même. Si l'on avoit à résoudre

l'équation $abx - axx = b^2c$; conformément à ce qui a été dit (99 & 100), je changerois cette équation en $axx - abx = -b^2c$, puis en $xx - bx = -\frac{b^2c}{a}$; j'ajouterois à chaque membre le quarré de $-\frac{b}{2}$; c'est-à-dire, $+\frac{bb}{4}$, & j'aurois $xx - bx + \frac{bb}{4} = \frac{bb}{4} - \frac{b^2c}{a}$; tirant la racine quarrée, j'ai $x - \frac{b}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{bb}{4} - \frac{b^2c}{a}\right)}$, & enfin $x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{bb}{4} - \frac{b^2c}{a}\right)}$.

106. Lorsque l'équation est littérale, elle peut se présenter sous une forme plus composée que nous ne l'avons vue jusqu'ici ; mais on peut toujours la ramener à trois termes en cette manière.

Soit l'équation $ax^2 + bcx - a^2b = bx^2 - ab^2 - acx$. Je passe dans un seul membre tous les termes affectés de x, en observant d'écrire de suite, tous ceux qui ont les mêmes puissances de x, & j'ai $ax^2 - bx^2 + bcx + acx = a^2b - ab^2$. Je remarque, à présent, que $ax^2 - bx^2$ n'est autre chose que $(a - b) \times x^2$, ou $(a - b)x^2$; pareillement $bcx + acx$ n'est autre chose que $(bc + ac)x$, ensorte que l'équation $ax^2 - bx^2 + bcx + acx = a^2b - ab^2$ peut s'écrire ainsi $(a - b)x^2 + (bc + ac)x = a^2b - ab^2$; or les quantités a, b, c étant des quantités connues, on doit regarder $a - b$, $bc + ac$, & $a^2b - ab^2$ comme des quantités toutes connues ; on peut donc, pour abréger, représenter chacune de ces quantités

par une feule lettre, & fuppofer $a - b = m$, $bc + ac = n$, $a^2b - ab^2 = p$, & alors l'équation eft réduite à $mx^2 + nx = p$, qui eft dans le cas des précédentes, & qui étant réfolue fuivant les mêmes règles, deviendra fucceffivement $x^2 + \frac{n}{m}x = \frac{p}{m}$, puis $x^2 + \frac{n}{m}x + \frac{n^2}{4m^2} = \frac{n^2}{4m^2} + \frac{p}{m}$ (en ajoutant le quarré de la moitié de $\frac{n}{m}$, c'eft-à-dire, de $\frac{n}{2m}$); tirant la racine quarrée, $x + \frac{n}{2m} = \pm\sqrt{\left(\frac{n^2}{4m^2} + \frac{p}{m}\right)}$; enfin $x = \frac{-n}{2m} \pm\sqrt{\left(\frac{n^2}{4m^2} + \frac{p}{m}\right)}$.

107. Au refte on ne fait ces fortes de transformations que lorfque le calcul qu'on auroit à faire fans elles, feroit très-compofé; car dans ce même exemple, après avoir mis l'équation propofée, fous la forme $(a - b)x^2 + (bc + ac)x = a^2b - ab^2$, on peut la traiter, fans trop de calcul, comme les précédentes, en divifant d'abord par $a - b$, ce qui donne $x^2 + \frac{bc + ac}{a - b}x = \frac{a^2b - ab^2}{a - b}$; maintenant il faut ajouter de part & d'autre le quarré de la moitié de $\frac{bc + ac}{a - b}$, c'eft-à-dire, le quarré de $\frac{bc + ac}{2a - 2b}$; mais on peut fe contenter de l'indiquer en cette manière $\left(\frac{bc + ac}{2a - 2b}\right)^2$; ainfi on aura $x^2 + \frac{bc + ac}{a - b}x + \left(\frac{bc + ac}{2a - 2b}\right)^2 = \left(\frac{bc + ac}{2a - 2b}\right)^2 + \frac{a^2b - ab^2}{a - b}$; tirant la racine quarrée, on aura. . . . .

$$x + \frac{bc + ac}{2a - 2b} = \pm\sqrt{\left[\left(\frac{bc + ac}{2a - 2b}\right)^2 + \frac{a^2b - ab^2}{a - b}\right]},$$

& enfin $x = \frac{-bc - ac}{2a - 2b} \pm\sqrt{\left[\left(\frac{bc + ac}{2a - 2b}\right)^2 + \frac{a^2b - ab^2}{a - b}\right]}$.

108

108. Quoiqu'on puisse, lorsqu'on a conclu la valeur de x, laisser le radical dans l'état où il est, jusqu'à ce qu'on vienne aux applications numériques; néanmoins, il peut être souvent utile de lui donner une forme plus simple, en réduisant au même dénominateur les deux parties qui se trouvent sous ce radical. Sur quoi il faut observer qu'on peut souvent les réduire au même dénominateur d'une manière plus simple que par la règle générale donnée (47), & cela en se conformant aux observations que nous avons faites (48).

Prenons, pour exemple, $\sqrt{\left(\frac{n^2}{4m^2}+\frac{p}{m}\right)}$: pour réduire à un même dénominateur les deux quantités $\frac{n^2}{4m^2}$ & $\frac{p}{m}$, j'observe que leurs dénominateurs actuels ont un facteur commun m, & que par conséquent, si je multipliois les deux termes de la fraction $\frac{p}{m}$, par $4m$ qui est le second facteur du premier dénominateur, alors elle auroit le même dénominateur que cette première fraction; c'est pourquoi je change $\sqrt{\left(\frac{n^2}{4m^2}+\frac{p}{m}\right)}$ en $\sqrt{\left(\frac{n^2+4pm}{4m^2}\right)}$; or comme le radical marque qu'il faut tirer la racine quarrée de la fraction, c'est-à-dire (*Arith.* 142) du numérateur & du dénominateur; je tire celle du dénominateur qui est un quarré; & j'ai $\frac{\sqrt{n^2+4pm}}{2m}$; ainsi dans l'équation ci-dessus où nous avons trouvé $x=\frac{-n}{2m}\pm\sqrt{\left(\frac{n^2}{4m}+\frac{p}{m}\right)}$, on peut changer cette valeur de x en cette autre $x=$

$\frac{-n}{2m} \pm \frac{\sqrt{(n^2+4pm)}}{2m}$, ou à cauſe du dénominateur commun $2m$, en cette autre $x = \frac{-n \pm \sqrt{(n^2+4pm)}}{2m}$.

De l'Extraction de la racine quarrée des quantités littérales.

109. La réſolution des équations du ſecond degré conduit donc, comme nous venons de le voir, à extraire la racine quarrée des quantités, ſoit numériques, ſoit littérales. Nous n'avons rien à ajouter à ce que nous avons dit des premières en Arithmétique. Nous allons parler des dernières.

Lorſqu'il a été queſtion de la multiplication des quantités monomes (18), nous avons dit que le produit renfermoit toutes les lettres du multiplicande & toutes celles du multiplicateur; or, lorſqu'on élève une quantité au quarré, le multiplicande & le multiplicateur ſont les mêmes; donc, dans un quarré monome, chacune des lettres de la racine doit être deux fois facteur; donc l'expoſant de chacune des lettres d'un quarré monome doit être double de celui des mêmes lettres dans la racine; donc *pour avoir la racine quarrée d'une quantité monome, il faut donner à chacune des lettres de cette quantité, un expoſant moitié moindre*; ſuivant cette règle, la racine quarrée de a^2 eſt a, celle de a^6 eſt a^3, celle de $a^2b^2c^2$ eſt abc, celle de $a^4b^6c^8$ eſt $a^2b^3c^4$.

110. S'il se trouvoit un exposant impair, ce seroit donc un signe que la quantité proposée n'est point un quarré parfait ; alors, en suivant la règle, il resteroit un exposant fractionnaire qui désigneroit qu'il reste à tirer la racine quarrée de la quantité qui auroit cet exposant. Ainsi, la racine quarrée de $a^2b^3c^4$ est $ab^{\frac{3}{2}}c^2$ ou $abb^{\frac{1}{2}}c^2$: car on peut considérer $a^2b^3c^4$ comme $a^2b^2bc^4$.

L'exposant fractionnaire a donc ici le même usage que le signe $\sqrt{}$; ainsi $abb^{\frac{1}{2}}c^2$, ou (ce qui est la même chose) $abc^2b^{\frac{1}{2}}$ équivaut à $abc^2\sqrt{b}$. Donc réciproquement, si une quantité monome est affectée du signe $\sqrt{}$, on pourra supprimer ce radical, pourvu qu'on prenne la moitié de chacun des exposans.

111. Cette remarque sert à simplifier les quantités affectées du signe $\sqrt{}$, lorsque cela est possible. Par exemple, la quantité $\sqrt{a^2b^3c}$ étant la même chose que $a^{\frac{2}{2}}b^{\frac{3}{2}}c^{\frac{1}{2}}$, se réduit à $abb^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}$, ou, en remettant le radical, au lieu des exposans fractionnaires, à $ab\sqrt{bc}$. De même $\sqrt{a^5b^4c^3}$ se réduit à $a^2b^2c\sqrt{ac}$, en considérant $a^5b^4c^3$ comme $a^4b^4c^2ac$, & prenant la moitié des exposans 4, 4 & 2. On trouvera de même que $\sqrt{\frac{a^3}{f}}$ se réduit à $a\sqrt{\frac{a}{f}}$; ou bien

si l'on multiplie le numérateur & le dénominateur par f, se réduit à $a\sqrt{\frac{af}{f^2}}$, ou enfin à $\frac{a}{f}\sqrt{af}$.

112. On voit donc que pour faire sortir hors du radical les facteurs que l'on peut en faire sortir, il faut prendre la moitié des exposans de ces facteurs. Au contraire pour faire entrer sous le radical un facteur qui seroit au dehors, il faudra doubler l'exposant de ce facteur, c'est-à-dire, élever ce facteur au quarré. Ainsi $a\sqrt{b}$ peut être changé en $\sqrt{a^2 b}$; $a\sqrt{\frac{b}{a}}$ peut être changé en $\sqrt{\frac{a^2 b}{a}}$ qui se réduit à $\sqrt{ab}$. De même $(a+b)\sqrt{c}$ peut être changé en $\sqrt{(a+b)^2 c}$.

113. Jusqu'ici nous n'avons pas eu égard au coëfficient. S'il y en avoit un, & qu'il fût un quarré parfait, on en tireroit la racine quarrée selon les règles de l'Arithmétique ; ainsi $\sqrt{9a^2b^3}$ devient $3ab\sqrt{b}$. De même, $\sqrt{1024a^2b^3c}$ devient $32ab\sqrt{bc}$.

114. Mais si le coëfficient n'étoit point un quarré parfait, il faudroit voir s'il ne peut pas être décomposé en deux facteurs dont l'un soit un quarré parfait dont on tireroit la racine, & on laisseroit l'autre sous le radical ; c'est ainsi que $\sqrt{48a^2b^3}$ se réduit à $4ab\sqrt{3b}$, parce que 48 étant $=16\times 3$, $\sqrt{48a^2b^3} = \sqrt{16\times 3a^2b^3}$, ou $=\sqrt{16a^2b^2\times 3b} = 4ab\sqrt{3b}$.

On trouvera de même que $\sqrt{512a^3b^2}$ se réduit à $16ab\sqrt{2a}$.

115. Si la quantité affectée du signe radical, est complexe, & n'est point un quarré parfait, il faut examiner si elle ne peut pas être décomposée en deux facteurs, dont l'un seroit un quarré parfait; alors on tireroit la racine de celui-ci, & on laisseroit l'autre sous le radical. Lorsque le facteur quarré, s'il y en a, est monome, il est toujours facile à appercevoir. Par exemple, dans la quantité $\sqrt{(4a^3b^2 - 5a^2b^3 + 6b^5)}$, je vois que b^2 est facteur de tous les termes, ensorte que cette quantité équivaut à cette autre $\sqrt{[(4a^3 - 5a^2b + 6b^3) \times b^2]}$; je tire donc la racine quarrée de b^2, & j'ai $b\sqrt{(4a^3 - 5a^2b + 6b^3)}$.

116. Mais lorsque ce facteur quarré doit être complexe, ou lorsque la quantité complexe qui est sous le radical, est elle-même un quarré, il faut bien se garder, pour en avoir la racine, de tirer séparément la racine quarrée de chacun des termes qui la composent. Par exemple, si l'on avoit $a^2 + b^2$, on se tromperoit beaucoup si l'on prenoit $a + b$ pour cette racine, puisque le quarré de $a + b$ n'est pas $a^2 + b^2$, mais $a^2 + 2ab + b^2$ (25). $a^2 + b^2$ n'a point de racine exacte en lettres. Voici la méthode qu'il

faut suivre lorsque la quantité complexe proposée est susceptible d'une racine exacte.

117. Soit donc la quantité $60ab + 36a^2 + 25b^2$. Pour en avoir la racine quarrée, j'ordonne les termes de cette quantité par rapport à l'une de ses lettres : par rapport à a, par exemple,

$$\begin{array}{r|l} 36a^2 + 60ab + 25b^2 & 6a + 5b \text{ Racine.} \\ -36a^2 \qquad\qquad\qquad & \overline{12a + 5b} \\ \hline +60ab + 25b^2 & \\ -60ab - 25b^2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Je prends la racine quarrée du premier terme $36a^2$, laquelle est $6a$ que j'écris à côté de la quantité proposée.

Je quarre cette racine & j'écris le quarré $36a^2$ sous le premier terme, avec le signe $-$, pour le retrancher. La réduction faite, il reste $+ 60ab + 25b^2$.

Sous la racine $6a$ j'écris son double $12a$ que j'emploie pour diviser le premier terme $60ab$ de la quantité restante $60ab + 25b^2$. Je trouve pour quotient $+ 5b$ que j'écris à la suite de la racine $6a$, & j'ai $6a + 5b$ pour la racine cherchée ; mais pour confirmer cette opération, j'écris aussi le quotient $5b$ que je viens de trouver, à côté de $12a$, & je multiplie le total $12a + 5b$ par ce même quotient $5b$; je porte à mesure, les produits, sous la quantité $60ab + 25b^2$, en observant de changer les signes de ces produits ; faisant ensuite la réduction, il ne reste rien ; j'en conclus que la racine trouvée $6a + 5b$ est la racine quarrée exacte de $36a^2 + 60ab + 25b^2$.

Prenons pour ſecond exemple, la quantité $9b^2 - 12ab + 16c^2 + 4a^2 + 16ac - 24bc$. J'ordonne cette quantité par rapport à la lettre a, & j'ai. . . . .

	$4a^2 - 12ab + 16ac + 9b^2 - 24bc + 16c^2$	$2a - 3b + 4c$ Racine.
	$-4a^2$	
		$4a - 3b$
1ᵉʳ Reſte	$-12ab + 16ac + 9b^2 - 24bc + 16c^2$	$4a - 6b + 4c$
	$+12ab \qquad -9b^2$	
2ᵈ Reſte	$+16ac - 24bc + 16c^2$	
	$-16ac + 24bc - 16c^2$	
Dernier Reſte.	0	

Je tire la racine quarrée de $4a^2$: elle eſt $2a$, que j'écris à côté. Je quarre $2a$, & je l'écris, avec le ſigne —, ſous $4a^2$; faiſant la réduction, il reſte $-12ab + 16ac + 9b^2 - 24bc + 16c^2$.

Au-deſſous de la racine $2a$, j'écris ſon double $4a$, que j'emploie pour diviſer le premier terme $-12ab$ du reſte : je trouve pour quotient $-3b$, que j'écris à la ſuite du premier terme $2a$ de la racine : je l'écris auſſi à côté du double $4a$, & je multiplie le tout $4a - 3b$, par le même quotient $-3b$; écrivant les produits, après avoir changé leurs ſignes, ſous le reſte $-12ab + 16ac$, &c. ; & faiſant la réduction, j'ai pour ſecond reſte, $+16ac - 24bc + 16c^2$.

Je conſidère à préſent les deux termes de la racine $2a - 3b$, comme ne faiſant qu'une ſeule quantité, je double cette quantité, & je l'écris au-deſſous pour ſervir de diviſeur au ſecond reſte ; mais pour faire cette diviſion, je me contente, ſelon ce qui a été dit (36), de diviſer le premier terme $+16ac$, par le premier terme $+4a$ de mon diviſeur ; je trouve pour quotient $+4c$, que j'écris à la

fuite de la racine $2a - 3b$, & à la fuite du double $4a - 6b$: je multiplie cette dernière fomme $4a - 6b + 4c$, par le nouveau terme $+ 4c$ de la racine ; & changeant, à mefure, les fignes des produits, j'écris ces mêmes produits fous le fecond refte ; faifant la fouftraction, il ne refte rien. D'où je conclus que la racine trouvée eft exacte.

Tout cela eft fondé fur ce principe, que le quarré d'une quantité compofée de deux parties, contient le quarré de la première, le double de la première multipliée par la feconde, & le quarré de la feconde ; car il fuit de-là, que pour avoir la première partie, il faudra tirer la racine quarrée du premier quarré ; que pour avoir la feconde, il faudra divifer le terme fuivant, par le double de la racine trouvée ; & qu'enfin pour vérifier, il faudra multiplier le double de la première par la feconde, & la feconde par elle-même ; or c'eft ce que prefcrit la méthode que nous venons d'expofer.

Nous invitons les Commençans à s'exercer encore fur les trois quantités fuivantes : 1°. $16a^4 + 40a^3b + 25a^2b^2$. 2°. $36b^4 - 60ab^3 + 25a^2b^2 - 36b^2c^2 + 30abc^2 + 9c^4$. 3°. $a^6 - 4a^3c^3 + 8a^3e^3 + 4c^6 - 16c^3e^3 + 16e^6$, dont ils trouveront que les racines quarrées font $4a^2 + 5ab$, $6b^2 - 5ab - 3c^2$, $a^3 - 2c^3 + 4e^3$.

Du calcul des quantités affectées du figne $\sqrt{}$.

118. On fait fur les quantités radicales dont nous venons de parler, les mêmes opérations que fur les autres quantités. Lorfque les deux quantités radicales ne font pas femblables, on fe contente, pour les

ajouter ou les soustraire, de les unir par le signe + ou le signe —. Ainsi $3a\sqrt{b}$ ajouté avec $4b\sqrt{c}$, donne $3a\sqrt{b}+4b\sqrt{c}$; de même $3a\sqrt{b}$ retranché de $4b\sqrt{c}$, donne $4b\sqrt{c}-3a\sqrt{b}$. Mais si les quantités radicales sont semblables & ne diffèrent que par le coëfficient numérique hors du radical, alors on ajoute ou l'on retranche les coëfficiens, selon qu'il s'agit d'addition ou de soustraction. Par exemple, $4ab\sqrt{c}$, ajouté avec $5ab\sqrt{c}$, donne $9ab\sqrt{c}$.

Nous supposons ici qu'on a réduit les radicaux selon ce qui a été enseigné (112); car si l'on avoit $4b\sqrt{a^3c}$ à ajouter avec $6a\sqrt{ab^2c}$; je commencerois par réduire le premier radical à $4ab\sqrt{ac}$, & le second à $6ab\sqrt{ac}$, lesquels ajoutés, donnent $10ab\sqrt{ac}$.

Pour multiplier deux quantités radicales, il faut multiplier comme s'il n'y avoit point de radicaux, & affecter ensuite le produit, du signe radical.

Par exemple, pour multiplier $\sqrt{a}$ par $\sqrt{c}$, je multiplierai a par c, & donnant au produit ac, le signe $\sqrt{}$, j'aurai $\sqrt{ac}$. Pour multiplier $\sqrt{(a^2+b^2)}$ par $\sqrt{ac}$, j'aurai $\sqrt{(a^3c+ab^2c)}$. De même $\sqrt{a}\times\sqrt{a}=\sqrt{a^2}=a$; $\sqrt{(a+b)}\times\sqrt{(a+b)}=\sqrt{(a+b)^2}=a+b$; $\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}=\sqrt{(-a)^2}=-a$ (*). On voit donc que

(*) Il ne faut pas confondre $\sqrt{(-a)^2}$ avec $\sqrt{-aa}$; le premier est $\sqrt{(-a\times-a)}$, & le second est $\sqrt{(-a\times+a)}$. Nous ferons, à cette occasion, une remarque que nous croyons

pour quarrer une quantité affectée du signe $\sqrt{}$, il n'y a autre chose à faire qu'à ôter ce signe ; ainsi pour quarrer $\sqrt{(a^2b + b^3)}$, j'aurai $a^2b + b^3$.

119. Cette remarque peut servir à dégager une équation des signes $\sqrt{}$, qu'elle peut renfermer. Par exemple, si j'avois l'équation $x - 2a = b + \sqrt{ax}$, je laisserois $\sqrt{ax}$ seul dans un membre, & j'aurois $x - 2a - b = \sqrt{ax}$; alors, quarrant chaque membre, j'aurois $x^2 - 4ax - 2bx + 4aa + 4ab + bb = ax$, ou en transposant, $x^2 - 5ax - 2bx = - 4aa - 4ab - bb$.

120. Pour diviser une quantité radicale, par une autre quantité radicale, on divisera comme s'il n'y avoit pas de signe $\sqrt{}$, & on donnera au quotient ou à la fraction, le signe radical ; ainsi pour diviser

très à propos. Puisque $-a \times -a$ donne $+a^2$, dont (96) la racine est $\pm a$, $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$ devroit donc donner $\pm a$; cependant nous ne donnons ici que $-a$. La raison en est simple. Quand on demande quelle est la racine de $+a^2$, on a raison d'assigner également $+a$ & $-a$; parce que rien dans cette question ne détermine, si l'on considère $+a^2$, comme venu de $+a \times +a$, ou de $-a \times -a$; mais quand on demande quelle est la valeur de $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$; quoique cette quantité, selon les règles, se réduise à $\sqrt{+a^2}$, on ne doit prendre que $-a$, parce que la question elle-même fixe ici par quelle opération est venu $+a^2$. C'est en faisant cette attention qu'on remarquera que $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b}$ doit donner $-\sqrt{ab}$, & non pas $\pm\sqrt{ab}$; parce que $\sqrt{-a}$ étant la même chose que $\sqrt{a} \times \sqrt{-1}$, & $\sqrt{-b}$, la même chose que $\sqrt{b} . \sqrt{-1}$, $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b}$ sera $\sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{-1}$, ou $\sqrt{ab} \times \sqrt{(-1)^2}$, qui revient à $-\sqrt{ab}$, puisque $\sqrt{(-1)^2} = -1$.

$\sqrt{a}$ par $\sqrt{b}$, on divisera a par b, ce qui donnera $\frac{a}{b}$, auquel appliquant le radical, on aura $\sqrt{\frac{a}{b}}$. Pour diviser $\sqrt{ab}$ par $\sqrt{a}$, on divisera ab par a, ce qui donnera b, & on aura $\sqrt{b}$ pour quotient. Pour diviser $\sqrt{(aa - xx)}$ par $\sqrt{(a + x)}$, on divisera $aa - xx$ par $a + x$, ce qui donnera $a - x$, & on aura $\sqrt{(a - x)}$ pour le quotient demandé. De même $ab\sqrt{bc}$ divisé par $a\sqrt{b}$, donnera $b\sqrt{c}$, en divisant ab par a, & $\sqrt{bc}$ par $\sqrt{b}$.

121. Si le dividende ou le diviseur étoit rationnel, on sépareroit l'un de l'autre par une barre assez longue pour faire connoître que l'un des deux n'est pas affecté du radical. Par exemple, pour diviser a par $\sqrt{b}$, on écriroit $\frac{a}{\sqrt{b}}$. Pour diviser a par $\sqrt{a}$, on écriroit $\frac{a}{\sqrt{a}}$; mais lorsqu'il y a une parité dans les lettres du dividende & du diviseur, il est souvent à propos de donner à la quantité rationnelle une forme de radical, parce qu'elle donne lieu à des simplifications; ainsi dans le dernier exemple, je changerois a en $\sqrt{a^2}$, & alors au lieu de $\frac{a}{\sqrt{a}}$ j'aurois $\frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{a}}$, & par conséquent $\sqrt{a}$. De même si j'avois $\sqrt{(aa - xx)}$ à diviser par $a + x$, j'écrirois $\frac{\sqrt{(aa - xx)}}{a + x}$ ou $\frac{\sqrt{(aa - xx)}}{\sqrt{(a + x)^2}}$ ou $\sqrt{\frac{aa - xx}{(a + x)^2}}$; &

comme le numérateur & le dénominateur peuvent être divisés chacun par $a+x$, j'aurois enfin $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$.

De la Formation des puissances des quantités monomes, de l'extraction de leurs racines, & du calcul des radicaux & des exposans.

122. Nous avons déjà dit qu'on appelle *puissance* d'une quantité, le produit de cette quantité multipliée par elle-même plusieurs fois de suite. a^3 est la troisième puissance ou le cube de a, parce que a^3 résulte de $a \times a \times a$. La quantité qu'on a multipliée est autant de fois facteur dans la puissance, qu'il y a d'unités dans l'exposant de cette même puissance: ainsi dans a^5, a est cinq fois facteur; dans $(a+b)^6$, $a+b$ est 6 fois facteur.

123. Puisque pour multiplier les quantités littérales monomes qui ont des exposans, il suffit (20) d'ajouter l'exposant de chaque lettre du multiplicande, avec l'exposant de la lettre semblable du multiplicateur, il s'ensuit donc que *pour élever à une puissance proposée, une quantité monome, il suffira de multiplier l'exposant actuel de chacune de ses lettres, par le nombre qui marque à quelle puissance on veut élever cette quantité.* Nous appellerons ce nombre *l'exposant de la puissance.*

Ainsi pour élever $a^2 b^3 c$ à la 4e puissance, j'écrirai

$a^8 b^{12} c^4$, en multipliant les expoſans 2, 3 & 1 de a, b, c, par l'expoſant 4 de la puiſſance à laquelle on veut élever $a^2 b^3 c$. En effet, pour élever $a^2 b^3 c$ à la 4me puiſſance, il faudroit multiplier $a^2 b^3 c$ par $a^2 b^3 c$, puis le produit par $a^2 b^3 c$, & ce ſecond produit par $a^2 b^3 c$; or pour faire ces multiplications, il faut (20) ajouter les expoſans; puis donc qu'ils ſont les mêmes dans chaque facteur, il faut ajouter chaque expoſant à lui-même 4 fois, c'eſt-à-dire, le multiplier par 4. Le raiſonnement eſt le même à quelque autre puiſſance qu'on veuille élever un monome, & quels que ſoient les expoſans actuels des lettres de ce monome.

Lorſqu'on a à faire ſur les expoſans des quantités, des raiſonnemens ou des opérations qui ne dépendent point de certaines valeurs particulières de ces expoſans, mais qui ſont également applicables à toutes ſortes d'expoſans, on repréſente ces expoſans par des lettres. Ainſi, pour en faire l'application à la règle que nous venons de donner; ſi l'on veut élever la quantité quelconque $a^m b^n c^p$ à une puiſſance quelconque déſignée par r, on écrira $a^{mr} b^{nr} c^{pr}$.

124. Si la quantité qu'on veut élever à une puiſſance propoſée, étoit une fraction, on éleveroit à cette puiſſance, le numérateur & le dénominateur;

ainsi $\frac{a^2 b^3}{c d^2}$ élevé à la 5me puissance, devient $\frac{a^{10} b^{15}}{c^5 d^{10}}$; pareillement $\frac{a^m b^n}{c^p d^q}$ élevé à la puissance r devient $\frac{a^{mr} b^{nr}}{c^{pr} d^{qr}}$.

125. Si la quantité proposée avoit un coëfficient, on l'éleveroit à la puissance proposée en le multipliant par lui-même, selon les règles de l'Arithmétique; ainsi $4 a^3 b^2$ élevé à la cinquième puissance donneroit $1024 a^{15} b^{10}$. Quelquefois on se contente d'indiquer cette élévation, comme pour les lettres; ainsi on peut écrire $4^5 a^{15} b^{10}$.

126. A l'égard des signes, si l'exposant de la puissance à laquelle il s'agit d'élever, est pair, le résultat aura toujours le signe $+$; mais s'il est impair, il aura le signe $+$ ou le signe $-$, selon que la quantité proposée aura elle-même le signe $+$ ou le signe $-$; c'est une suite immédiate de la règle donnée pour les signes (24).

127. Il suit de tout ce que nous venons de dire, que dans une puissance quelconque, l'exposant actuel de chaque lettre contient l'exposant de sa racine, autant qu'il y a d'unités dans l'exposant de la puissance que l'on considère; par exemple, dans la quatrième puissance, l'exposant de chaque lettre est quadruple de ce qu'il étoit dans la quantité primitive qui en est la racine.

128. Donc pour revenir d'une puiſſance quelconque à ſa racine, c'eſt-à-dire, *pour extraire une racine d'un degré propoſé, d'une quantité monome quelconque, il faut diviſer l'expoſant actuel de chacune de ſes lettres, par le nombre qui marque le degré de la racine qu'on veut extraire.* On appelle ce nombre *l'expoſant de la racine.*

Ainſi pour tirer la racine troiſième ou cubique de $a^{12}b^6c^3$, je diviſerois chacun des expoſans par 3, & j'aurois a^4b^2c. Pareillement pour tirer la racine cinquième de $a^{20}b^{15}c^5$, je diviſerois chacun des expoſans par 5, & j'aurois a^4b^3c. En général pour tirer la racine du degré r de la quantité $a^m b^n$, j'écrirois $a^{\frac{m}{r}} b^{\frac{n}{r}}$.

129. Si la quantité propoſée étoit une fraction, on tireroit ſéparément la racine du numérateur & celle du dénominateur.

130. S'il y avoit des coëfficiens, on en tireroit la racine quarrée ou cubique, par les méthodes données en Arithmétique; & par celle qu'on verra par la ſuite, lorſque cette racine eſt plus élevée.

131. Lorſque l'expoſant de la racine qu'on veut extraire, ne diviſe pas exactement chacun des expoſans de la quantité propoſée, c'eſt une preuve que

cette quantité n'eſt point une puiſſance parfaite du degré dont il s'agit. Alors l'expôſant reſte fractionnaire, & marque une racine qui reſte à extraire. Ainſi, ſi l'on demande la racine cubique de $a^9 b^3 c^4$, on aura $a^3 b c^{\frac{4}{3}}$ ou $a^3 b c c^{\frac{1}{3}}$, dans laquelle l'expoſant $\frac{1}{3}$ marque qu'il reſte encore à extraire la racine cubique de c.

132. On indique auſſi les extractions de racines ſupérieures au ſecond degré, en employant le ſigne $\sqrt{\ }$; mais on place dans l'ouverture de ce ſigne, le nombre qui marque le degré de la racine dont il s'agit. Ainſi $\sqrt[3]{a}$, marque la racine cubique de a: $\sqrt[7]{a}$ marque la racine ſeptième de a. Il faut donc regarder ces deux expreſſions $\sqrt[3]{a}$ & $a^{\frac{1}{3}}$ comme ſignifiant la même choſe: il en eſt de même de $\sqrt[5]{a^4}$ & $a^{\frac{4}{5}}$.

133. Lorſque la quantité eſt complexe, il ne faut pas diviſer chacun de ſes expoſans; mais il faut conſidérer la totalité de ſes parties, comme ne faiſant qu'une ſeule quantité dont l'expoſant eſt naturellement 1, que l'on diviſe par l'expoſant de la racine qu'il s'agit d'extraire, ce qui n'eſt, à proprement parler, qu'une indication de cette racine; par exemple, au lieu de $\sqrt[4]{(a^2+b^2)}$ qui eſt la même choſe que $\sqrt[4]{(a^2+b^2)^1}$, on écrit, $(a^2+b^2)^{\frac{1}{4}}$ ou $\overline{a^2+b^2}^{\frac{1}{4}}$.

Si

Si la quantité totale qui est sous le radical, avoit déjà un exposant, on diviseroit de même cet exposant, par celui de la racine qu'on a dessein d'extraire. Ainsi, au lieu de $\sqrt[4]{(a^2+b^2)^3}$, on peut écrire $(a^2+b^2)^{\frac{3}{4}}$.

134. Les règles que nous avons données (118 & *suiv.*) pour l'addition, la soustraction, la multiplication & la division des quantités radicales du second degré, s'appliquent également aux quantités radicales de degrés supérieurs, pourvu que les radicaux sur lesquels on a à opérer, soient de même degré entre eux. Ainsi $\sqrt[7]{a^5} \times \sqrt[7]{a^3} = \sqrt[7]{a^8} = \sqrt[7]{a^7 a} = a\sqrt[7]{a}$. $\sqrt[5]{a^2 b^3} \times \sqrt[5]{a^3 b^2} = \sqrt[5]{a^5 b^5} = ab$. $a \times \sqrt[5]{\frac{b}{a}} = \sqrt[5]{a^5} \times \sqrt[5]{\frac{b}{a}} = \sqrt[5]{\frac{a^5 b}{a}} = \sqrt[5]{a^4 b}$.

135. S'il s'agit d'élever un radical quelconque à une puissance dont l'exposant soit le même que celui du radical, il suffira d'ôter ce radical ainsi $(\sqrt[5]{a})^5 = a$; ce qui est évident en général, si l'on fait attention que l'objet est alors de ramener la quantité à son premier état.

Pour élever une quantité radicale monome à une puissance quelconque, il faut élever chacun de ses facteurs à cette puissance, selon la règle donnée (123). Ainsi $\sqrt[7]{a^2 b^3}$ élevé à la puissance quatrième, donne

$\sqrt[7]{a^8 b^{12}}$ qui se réduit à $ab\sqrt[7]{ab^5}$; ce qu'on peut voir encore en cette autre manière : $\sqrt[7]{a^2 b^3}$ étant la même chose (132) que $a^{\frac{2}{7}} b^{\frac{3}{7}}$, pour élever celui-ci à la quatrième puissance, je multiplie ses exposans par 4, ce qui me donne $a^{\frac{8}{7}} b^{\frac{12}{7}} = ab a^{\frac{1}{7}} b^{\frac{5}{7}}$ $= ab\sqrt[7]{ab^5}$.

136. Pour diviser $\sqrt[7]{a^5}$ par $\sqrt[7]{a^3}$, on divisera a^5 par a^3, & l'on donnera au quotient a^2 le signe $\sqrt[7]{\ }$, ce qui donnera $\sqrt[7]{a^2}$.

De même $\frac{\sqrt[5]{a^4 b^3}}{\sqrt[5]{a^2 b}} = \sqrt[5]{\frac{a^4 b^3}{a^2 b}} = \sqrt[5]{a^2 b^2}$;

$\frac{a}{\sqrt[5]{a^3}} = \frac{\sqrt[5]{a^5}}{\sqrt[5]{a^3}} = \sqrt[5]{\frac{a^5}{a^3}} = \sqrt[5]{a^2}$; $\frac{\sqrt[5]{a^3}}{a}$ $= \frac{\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt[5]{a^5}} = \sqrt[5]{\frac{a^3}{a^5}} = \sqrt[5]{\frac{1}{a^2}} = \frac{1}{\sqrt[5]{a^2}}$; car la racine cinquième de 1 est 1. En général toute puissance ou toute racine de l'unité est l'unité.

137. Pour extraire une racine quelconque d'une quantité radicale, il faut multiplier l'exposant actuel du radical, par l'exposant de cette nouvelle racine; ainsi, pour extraire la racine troisième de $\sqrt[5]{a^4}$, on écrira $\sqrt[15]{a^4}$, en multipliant 5 par 3. En effet $\sqrt[5]{a^4} = a^{\frac{4}{5}}$; or (128) pour extraire la racine de

celui-ci, il faut diviser son exposant par 3, ce qui donne $a^{\frac{4}{15}}$ qui est la même chose que $\sqrt[15]{a^4}$.

138. Lorsque les quantités radicales proposées, ne sont pas toutes du même degré, il faut pour pratiquer sur elles les opérations de l'addition, soustraction, multiplication & division, les ramener au même degré ; ce qui est facile par cette règle.

S'il n'y a que deux radicaux, multipliez l'exposant de l'un, par l'exposant de l'autre ; le produit sera l'exposant commun que doivent avoir les deux radicaux : élevez en même temps la quantité qui est sous chaque radical, à la puissance marquée par l'exposant de l'autre radical.

Par exemple, pour réduire à un même radical, les deux quantités $\sqrt[5]{a^3}$ & $\sqrt[7]{a^4}$, je multiplie 5 par 7, & j'ai 35 pour l'exposant du nouveau radical qui sera $\sqrt[35]{\ }$; j'élève a^3 à la septième puissance, & a^4 à la cinquième, ce qui me donne a^{21} & a^{20}, ensorte que les quantités proposées sont changées en $\sqrt[35]{a^{21}}$ & $\sqrt[35]{a^{20}}$.

S'il y a plus de deux quantités radicales, *multipliez entre eux les exposans de tous les radicaux ; le produit sera l'exposant commun que doivent avoir tous ces radicaux. Élevez, en même temps, la quantité qui est sous chaque radical, à une puissance d'un degré marqué*

par le produit des exposans de tous les radicaux autres que celui dont il s'agit.

Par exemple, si j'avois les trois radicaux $\sqrt[5]{a^3}$, $\sqrt[7]{a^2}$, & $\sqrt[8]{a^7}$; je multiplierois les trois exposans 5, 7 & 8, ce qui me donneroit 280 pour l'exposant commun des nouveaux radicaux; j'éleverois a^3 à la puissance 7×8 ou 56; a^2, à la puissance 5×8 ou 40; & a^7 à la puissance 5×7 ou 35, ce qui me donneroit $\sqrt[280]{a^{168}}$, $\sqrt[280]{a^{80}}$, $\sqrt[280]{a^{245}}$.

La raison de cette règle est facile à appercevoir, en observant sur le premier exemple, que lorsqu'on élève, selon la règle, a^3 à la septième puissance, on rend a sept fois aussi souvent facteur qu'il l'étoit: mais en rendant l'exposant de son radical sept fois aussi grand qu'il l'étoit, on rend a sept fois moins souvent facteur; il y a donc compensation, & il n'y a que la forme de changée.

139. On peut conclure de ce raisonnement, que lorsque l'exposant de la quantité qui est sous le radical, & celui du radical même, ont un diviseur commun, on peut en simplifier l'expression, en divisant par ce diviseur commun, l'un & l'autre de ces deux exposans: par exemple, $\sqrt[12]{a^8}$, peut se réduire à $\sqrt[3]{a^2}$, en divisant 12 & 8 par 4. Pareillement $\sqrt[4]{a^2}$ peut se réduire à $\sqrt{a}$; $\sqrt[6]{a^3}$ se réduit à $\sqrt{a}$.

140. Concluons encore que lorſque l'expoſant de la racine qu'on veut extraire eſt un nombre compoſé du produit de deux ou pluſieurs autres nombres, on peut faire cette extraction ſucceſſivement en cette manière : Suppoſons qu'on demande la racine ſixième de a^{24} ; je puis tirer d'abord la racine quarrée, puis la racine cubique, & j'aurai la racine ſixième. En effet $\sqrt[6]{a^{24}}$, ſe réduit (139) à $\sqrt[3]{a^{12}}$; puis à $\sqrt[1]{a^4}$ ou a^4, ce qui eſt la même choſe que ſi l'on avoit pris tout de ſuite la racine ſixième de a^{24} en diviſant l'expoſant 24 par 6, (128).

Au reſte, comme les expoſans fractionnaires tiennent lieu des radicaux, & que les premiers ſont plus commodes à employer dans le calcul, que les derniers, nous dirons encore un mot ſur le calcul des expoſans.

Si j'avois $\sqrt[5]{a^3}$ à multiplier par $\sqrt[5]{a^4}$, je changerois cette opération en celle-ci : $a^{\frac{3}{5}} \times a^{\frac{4}{5}}$, qui (20) donne $a^{\frac{7}{5}}$ ou $aa^{\frac{2}{5}}$ qui ſe réduit à $a\sqrt[5]{a^2}$. Si j'avois $\sqrt[5]{a^3}$ à multiplier par $\sqrt[7]{a^4}$, j'écrirois $a^{\frac{3}{5}} \times a^{\frac{4}{7}}$ ou $a^{\frac{3}{5}+\frac{4}{7}}$, ou (en réduiſant les deux fractions au même dénominateur), $a^{\frac{21+20}{35}}$, ou $a^{\frac{41}{35}}$ qui revient à $aa^{\frac{6}{35}}$, ou enfin à $a\sqrt[35]{a^6}$.

En général, $\sqrt[m]{a^n b^p} \times \sqrt[q]{a^r b^s}$ ſe change en $a^{\frac{n}{m}} b^{\frac{p}{m}} \times a^{\frac{r}{q}} b^{\frac{s}{q}}$ qui revient à $a^{\frac{n}{m}+\frac{r}{q}} b^{\frac{p}{m}+\frac{s}{q}}$, ou (en réduiſant au même dénominateur) $a^{\frac{qn+mr}{qm}} b^{\frac{pq+ms}{qm}}$, ou enfin

(132) à $\sqrt[qm]{a^{qn+mr}b^{pq+ms}}$. Il en est de même de la division; $\frac{\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[5]{a^3}}$ se change en $\frac{a^{\frac{4}{5}}}{a^{\frac{3}{5}}} = a^{\frac{1}{5}}$ (31), ou enfin en $\sqrt[5]{a}$. Pareillement $\frac{\sqrt[5]{a^3b^4}}{\sqrt[7]{a^2b^3}}$ se change en $\frac{a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{4}{5}}}{a^{\frac{2}{7}}b^{\frac{3}{7}}} = a^{\frac{3}{5}-\frac{2}{7}}$ $b^{\frac{4}{5}-\frac{3}{7}}$ (31), ou (en réduisant les fractions au même dénominateur) $a^{\frac{21-10}{35}}b^{\frac{28-15}{35}}$ qui se réduit à $a^{\frac{11}{35}}b^{\frac{13}{35}}$ qui est la même chose que $\sqrt[35]{a^{11}b^{13}}$. En général $\frac{\sqrt[m]{a^n b^p}}{\sqrt[q]{a^r b^s}} =$
$\frac{a^{\frac{n}{m}}b^{\frac{p}{m}}}{a^{\frac{r}{q}}b^{\frac{s}{q}}} = a^{\frac{n}{m}-\frac{r}{q}}b^{\frac{p}{m}-\frac{s}{q}} = a^{\frac{qn-mr}{qm}}b^{\frac{pq-ms}{qm}} =$
$\sqrt[qm]{a^{qn-mr}b^{pq-ms}}$.

141. Dans ce dernier exemple nous avons retranché l'exposant de chaque lettre du dénominateur, de l'exposant de la lettre correspondante dans le numérateur. La règle que nous avons donnée (31) pour la division, ne semble le permettre, que lorsque l'exposant du dénominateur est plus petit que celui du numérateur; mais cela se peut en général, en donnant à l'excédent, le signe —, après la réduction faite; ensorte qu'on peut en général mettre toute fraction Algébrique sous la forme d'un entier.

Par exemple, au lieu de $\frac{a^3}{b^2}$, on peut écrire a^3b^{-2}. En effet, suivant l'idée que nous avons donnée de la division,

l'effet d'un diviseur est de détruire, dans le dividende, tous les facteurs qui se trouvent dans le diviseur; dans $\frac{a^5}{a^2}$, qui se réduit à a^3, le diviseur a^2 détruit dans a^5 deux facteurs égaux à a. Pareillement dans la quantité $\frac{a^3}{b^2}$ l'effet de b^2 doit être de détruire dans a^3 deux facteurs égaux à b. Or quoique ces facteurs n'y soient pas explicitement, on peut toujours se les représenter : car on conçoit que a contient b, un certain nombre de fois soit entier soit fractionnaire : soit m ce nombre de fois; alors a vaut donc m fois b, ou mb; la quantité $\frac{a^3}{b^2}$ sera donc $\frac{m^3 b^3}{b^2}$ qui se réduit à $m^3 b$; or la quantité $a^3 b^{-2}$ devient en pareil cas $m^3 b^3 b^{-2}$ ou (20) $m^3 b^{3-2}$, c'est-à-dire, $m^3 b$; donc $\frac{a^3}{b^2}$ revient au même que $a^3 b^{-2}$.

Donc en général *on peut faire passer une quantité du dénominateur au numérateur, en l'écrivant dans celui-ci, comme facteur, mais avec un exposant de signe contraire à celui qu'elle avoit dans le dénominateur.*

Ainsi au lieu de $\frac{1}{a^3}$, on peut écrire $1 \times a^{-3}$ ou simplement a^{-3}; au lieu de $\frac{1}{a^m}$, on peut écrire a^{-m}; au lieu de $\frac{a^m b^n}{c^p d^q}$ on peut écrire $a^m b^n c^{-p} d^{-q}$. Au lieu de $\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2}$ on peut écrire $(a^3+b^3) \times (a^2+b^2)^{-1}$; & eu égard à tout ce qui précède, au lieu de $\frac{\sqrt[5]{(a^3+b^3)^4}}{\sqrt[4]{(a^2+b^2)^3}}$ on peut écrire $\frac{(a^3+b^3)^{\frac{4}{5}}}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{4}}}$, & enfin $(a^3+b^3)^{\frac{4}{5}} \times (a^2+b^2)^{-\frac{3}{4}}$.

142. Et réciproquement *si une quantité est composée de parties qui aient des exposans négatifs, on pourra faire passer ces parties au dénominateur, en rendant leurs exposans positifs.* Ainsi, au lieu de $a^3 b^{-4}$, on pourra écrire $\frac{a^3}{b^4}$; au lieu de a^{m-3} qui est la même chose que $a^m \times a^{-3}$ on pourra écrire $\frac{a^m}{a^3}$ & ainsi de suite.

De la Formation des puissances des quantités complexes, & de l'extraction de leurs racines.

143. Suivant l'idée que nous avons donnée des puissances, il ne s'agit, lorsqu'on veut élever une quantité complexe à une puissance proposée, que de multiplier cette quantité par elle-même autant de fois moins une qu'il y a d'unités dans l'exposant de cette puissance : mais en se bornant à ce moyen, on tomberoit souvent dans des calculs très-longs pour parvenir à des résultats qu'on peut avoir à bien moins de frais, en réfléchissant un peu sur les propriétés des produits de quelques-unes de ces multiplications.

Nous allons nous occuper des puissances des quantités binomes, parce que celles-ci conduisent à la formation des puissances des quantités plus composées; mais pour mieux faire sentir l'étendue de ce que nous avons à dire, nous reprendrons les

choſes d'un peu plus haut ; nous examinerons quelle eſt la nature des produits que l'on trouve en multipliant ſucceſſivement pluſieurs facteurs binomes qui auroient tous un terme commun : cette recherche qui nous conduira directement à notre objet, nous fournira en même temps pluſieurs propoſitions qui nous ſeront très-utiles par la ſuite.

144. Soient donc $x+a$, $x+b$, $x+c$, $x+d$, &c. pluſieurs quantités monomes qui ont toutes le terme x commun, & qu'on veut multiplier les unes par les autres.

En multiplian t $x+a$

par . . . $x+b$

on aura . . . . $x^2+ax+ab$
$+bx$

Multipliant ce produit par $x+c$, on aura

$$\begin{array}{l} x^3+ax^2+abx+abc \\ \quad +bx^2+acx \\ \quad +cx^2+bcx \end{array}$$

Multipliant ce ſecond produit par $x+d$, on aura

$$\begin{array}{l} x^4+ax^3+abx^2+abcx+abcd \\ \quad +bx^3+acx^2+abdx \\ \quad +cx^3+adx^2+acdx \\ \quad +dx^3+bcx^2+bcdx \\ \qquad\quad +bdx^2 \\ \qquad\quad +cdx^2 \end{array}$$

Et ainſi de ſuite ; ce qui nous fournit les obſervations ſuivantes, en prenant pour un terme tout ce qui eſt dans une même colonne.

1°. Le premier terme de chaque produit eſt toujours le premier terme x de chaque binome, élevé à une puiſſance marquée par le nombre de ces binomes ; enſorte que ſi le nombre des binomes étoit m, le premier terme de chaque produit ſeroit x^m.

2°. Les puiſſances de x vont enſuite en diminuant continuellement d'une unité juſqu'au dernier terme qui ne renferme plus d'x.

3°. Les multiplicateurs de chaque puiſſance de x, (que nous nommerons à l'avenir, multiplicateurs du terme où ſe trouvent ces puiſſances) ſont, pour le ſecond terme, la ſomme des ſeconds termes a, b, c, &c. des binomes ; pour le troiſième terme, la ſomme des produits de ces quantités a, b, c, &c. multipliées deux à deux ; pour le quatrième, la ſomme des produits de ces quantités a, b, c, &c. multipliées trois à trois ; & ainſi de ſuite juſqu'au dernier qui eſt le produit de toutes ces quantités. Ces conſéquences ſont évidentes, quel que ſoit le nombre des quantités $x+a$, $x+b$, &c. qu'on a multipliées.

145. Si l'on ſuppoſe maintenant, que toutes les

quantités a, b, c, &c. ſoient égales, auquel cas tous les binomes qu'on a multipliés ſeront égaux, les produits trouvés ci-deſſus, ſeront donc les puiſſances ſucceſſives de l'un quelconque de ces binomes, de $x+a$, par exemple, ſi l'on ſuppoſe que les quantités b, c, d, &c. ſont chacune égales à a. Si l'on met donc a dans ces produits, au lieu de chacune des lettres b, c, d, &c., on aura les réſultats ſuivans pour les valeurs des puiſſances qui ſont marquées à côté.

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x+a)^2$$

$$x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 = (x+a)^3$$

$$x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4 = (x+a)^4$$

Où l'on voit que ſi m eſt l'expoſant de la puiſſance à laquelle on veut élever le binome, les puiſſances ſucceſſives de x ſeront x^m, x^{m-1}, x^{m-2}, x^{m-3}, x^{m-4}, &c.

Mais on ne voit pas auſſi évidemment comment les coëfficiens des différens termes de chaque puiſſance dérivent les uns des autres, ni quelle eſt leur dépendance de l'expoſant m, dont cependant ils dépendent comme on va le voir.

146. Pour trouver la loi de ces coëfficiens, il faut retourner à nos premiers produits, & remarquer que puiſque le multiplicateur du ſecond terme eſt la ſomme de toutes les quantités a, b, c, &c., il faudra, lorſque toutes ces quantités ſeront égales

à a, qu'il ſoit composé de a, pris autant de fois qu'il y a de ces quantités ; donc ſi leur nombre eſt m, ce multiplicateur ſera m fois a, ou $m a$, c'eſt-à-dire, que ſon coëfficient m ſera égal à l'expoſant du premier terme de cette puiſſance. C'eſt ce que l'on voit auſſi dans les trois puiſſances particulières que nous avons expoſées ci-deſſus.

Voyons maintenant quels doivent être les multiplicateurs des autres termes. Il eſt évident que tous les produits ab, ac, ad, bc, bd, &c. deviennent chacun égal à a^2, dans la ſuppoſition préſente ; pareillement tous les produits abc, abd, &c. deviennent chacun égal à a^3 & ainſi de ſuite. Donc le multiplicateur du troiſième terme de chacun de nos premiers produits ſe réduit alors à a^2 pris autant de fois que les lettres a, b, c, &c. peuvent donner de produits deux à deux. Pareillement celui du quatrième ſe réduit à a^3 pris autant de fois que les lettres a, b, c, &c. peuvent donner de produits trois à trois & ainſi de ſuite ; donc pour avoir le coëfficient numérique, des troiſième, quatrième, &c. termes de la puiſſance m du binome $x + a$, la queſtion ſe réduit à déterminer combien un nombre m de lettres a, b, c, &c. peut donner de produits deux à deux, trois à trois, &c.

147. Or je remarque que ſi l'on a un nombre quelconque m de lettres, & qu'on les combine de toutes

les manières imaginables deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, &c. ſans répéter une même lettre dans une même combinaiſon, je remarque, dis-je,

1°. Que le nombre des combinaiſons deux à deux, ſera double du nombre des produits de deux lettres, réellement différens. En effet, deux lettres peuvent être combinées l'une avec l'autre de deux manières différentes; par exemple, *a* & *b* donnent ces deux combinaiſons *ab* & *ba*; mais ces deux combinaiſons ne font pas deux produits différens.

2°. Le nombre des combinaiſons de pluſieurs lettres trois à trois, ſera ſextuple du nombre des produits de trois lettres, réellement diſtincts : en effet, pour avoir les combinaiſons de trois quantités *a*, *b*, *c*, il faut, après en avoir combiné deux, *a* & *b*, par exemple, ce qui donne *ab* & *ba*, combiner la troiſième *c* avec chacune des deux premières combinaiſons, c'eſt-à-dire, lui donner toutes les diſpoſitions poſſibles à l'égard des lettres *a* & *b* qui entrent dans *ab* & *ba*; or cela donne 6 combinaiſons de trois lettres, comme il eſt évident par les diſpoſitions ſuivantes *abc*, *acb*, *cab*, *bac*, *bca*, *cba*; mais ces ſix combinaiſons ne font chacune que le même produit.

Un raiſonnement ſemblable prouvera que quatre quantités ſont ſuſceptibles de 24 combinaiſons, dont

chacune cependant ne fait que le même produit; donc le nombre des produits diſtincts qu'on peut avoir en combinant pluſieurs lettres quatre à quatre, eſt la 24ᵉ partie du nombre total de ces combinaiſons. Pareillement le nombre des produits diſtincts qu'on peut avoir en combinant pluſieurs lettres 5 à 5, 6 à 6, 7 à 7, &c. eſt la 120ᵉ, la 720ᵉ, la 5040ᵉ, &c. partie du nombre total de ces combinaiſons; c'eſt-à-dire, eſt, en général, exprimé par une fraction qui a pour numérateur le nombre total des combinaiſons, & pour dénominateur le produit de tous les nombres 1, 2, 3, 4, &c., juſqu'à celui qui marque de combien de lettres chaque produit eſt compoſé.

148. Voyons donc quel eſt le nombre total des combinaiſons que peut donner un nombre m de lettres a, b, c, &c., priſes deux à deux, trois à trois, &c.

Il eſt évident pour les combinaiſons deux à deux, que puiſqu'une même lettre ne doit pas être combinée avec elle-même, elle ne peut l'être qu'avec les $m - 1$ autres, & par conſéquent elle doit donner $m - 1$ combinaiſons; donc puiſqu'il y a m de lettres en tout, elles donneront m fois $(m - 1)$ ou $m \cdot (m - 1)$ combinaiſons. Donc ſuivant ce qui vient d'être dit (147), le nombre des produits de deux lettres, réellement différens, ſera $m \cdot \frac{m-1}{2}$.

A l'égard des combinaisons trois à trois : pour les avoir, il faut que chacune des combinaisons deux à deux, soit combinée avec chacune des lettres qu'elle ne renferme point, c'est-à-dire, avec un nombre de lettres marqué par $m - 2$; donc chacune de ces combinaisons donnera $m - 2$ combinaisons de trois lettres ; donc puisqu'il y a $m . (m - 1)$ combinaisons de deux lettres, dont chacune doit donner $m - 2$ combinaisons de trois lettres, il y aura en tout $m . (m - 1) . (m - 2)$ combinaisons de trois lettres ; donc puisque (124) le nombre des produits réellement distincts, est la sixième partie de ce nombre total de combinaisons, il sera $m . \frac{(m-1).(m-2)}{6}$ ou $m . \frac{m-1}{2} . \frac{m-2}{3}$.

On prouvera de même, que le nombre des combinaisons quatre à quatre, sera $m . (m - 1) . (m - 2) . (m - 3)$; car il faudra combiner chaque combinaison de trois lettres, avec toutes les autres lettres que cette combinaison ne renferme point, & qui étant au nombre de $m - 3$ donneront, pour chaque combinaison de trois lettres, $m - 3$ combinaisons de quatre lettres ; donc le nombre des combinaisons trois à trois étant $m . (m - 1) . (m - 2)$, celui des combinaisons quatre à quatre sera $m . (m - 1) . (m - 2) . (m - 3)$; & puisque le nombre des produits quatre à quatre

réellement différens, eſt la vingt-quatrième partie de ce nombre de combinaiſons, il ſera donc $m \cdot \frac{(m-1)}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4}$.

Le même raiſonnement prouvera que le nombre des produits diſtincts qu'on peut former en multipliant un nombre m de lettres 5 à 5, 6 à 6, &c. ſera exprimé par $m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \cdot \frac{m-4}{5}$, par $m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \cdot \frac{m-4}{5} \cdot \frac{m-5}{6}$, & ainſi de ſuite.

149. Concluons donc de-là, & de ce qui a été dit (146), que les termes ſucceſſifs du binome $x+a$ élevé à la puiſſance m ou de $(x+a)^m$ ſont

$$x^m + m a x^{m-1} + m \cdot \frac{m-1}{2} a^2 x^{m-2} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} a^3 x^{m-3} + \&c.$$

C'eſt-à-dire, que le premier terme de la ſuite ou ſérie qui exprime cette puiſſance, eſt le premier terme x du binome, élevé à la puiſſance m; qu'enſuite les expoſans de x vont en diminuant d'une unité, & ceux de a en augmentant d'une unité, à partir du ſecond terme où il commence à entrer. A l'égard des coëfficiens m, $m \cdot \frac{m-1}{2}$, &c., il faut remarquer que celui du ſecond eſt égal à l'expoſant du premier : que celui du troiſième qui eſt $m \cdot \frac{m-1}{2}$

eſt

eſt le coëfficient m du précédent multiplié par $\frac{m-1}{2}$; c'eſt-à-dire, par la moitié de l'expoſant de x dans ce même terme précédent. Pareillement, le coëfficient du quatrième qui eſt $m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}$, n'eſt autre choſe que le coëfficient $m.\frac{m-1}{2}$ du terme précédent, multiplié par $\frac{m-2}{3}$, c'eſt-à-dire, par le tiers de l'expoſant de x dans ce même terme précédent & ainſi de ſuite. Toutes ces conſéquences, que l'inſpection ſeule fournit, nous conduiſent à cette règle générale : *Le coëfficient de l'un quelconque des termes, ſe trouve en multipliant le coëfficient du précédent par l'expoſant de* x *dans ce même terme précédent, & diviſant par le nombre des termes qui précèdent celui dont il s'agit.*

Formons d'après cette règle, la ſeptième puiſſance de $x+a$, pour ſervir d'exemple. Nous aurons $(x+a)^7 = x^7 + 7ax^6 + 21a^2x^5 + 35a^3x^4 + 35a^4x^3 + 21a^5x^2 + 7a^6x + a^7$. En écrivant d'abord x^7; puis multipliant celui-ci par 7, diminuant l'expoſant d'une unité & multipliant par a, ce qui donne $7ax^6$.

Je multiplie celui-ci par $\frac{6}{2}$, je diminue l'expoſant de x d'une unité, & j'augmente celui de a d'une unité, & j'ai $21a^2x^5$ pour le troiſième terme.

Je multiplie ce troiſième par $\frac{5}{3}$, je diminue l'expoſant de x d'une unité, & j'augmente celui de a d'une unité,

ce qui me donne $35a^3x^4$ pour le quatrième terme : il est aisé d'achever.

Si au lieu de $x + a$, on avoit $x - a$; alors les termes auroient alternativement les signes + & —, à commencer du premier; car si dans a^4, par exemple, on substitue $-a$ au lieu de $+a$, le signe ne changera point (126); mais il changeroit si l'on substituoit $-a$ dans une puissance impaire de a.

La même formule que nous venons de donner peut servir à élever à une puissance proposée, non-seulement un binome simple comme $x + a$, mais encore un binome composé tel que $x^2 + a^2$ ou $x^2 + a$ ou $x^3 + a^3$, &c.; & même à élever non-seulement à une puissance dont l'exposant seroit un nombre entier positif, mais encore à une puissance dont l'exposant seroit positif ou négatif, entier ou fractionnaire. Mais ces usages exigent, pour plus de commodité, que nous lui donnions une autre forme.

150. Reprenons donc la formule $(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + m \cdot \frac{m-1}{2} a^2 x^{m-2} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot a^3\ x^{m-3} +$, &c.

Suivant ce que nous avons dit (142), on peut, au lieu de x^{m-1}, écrire $\frac{x^m}{x}$; au lieu de x^{m-2}, écrire $\frac{x^m}{x^2}$; au lieu de x^{m-3}, écrire $\frac{x^m}{x^3}$, & ainsi de suite. Conformément à ce principe, nous pourrons

donc changer notre formule en cette autre. $(x+a)^m = x^m + \frac{max^m}{x} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{a^2 x^m}{x^2} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{a^3 x^m}{x^3} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \cdot \frac{a^4 x^m}{x^4}$, &c.

Si l'on fait attention maintenant que tous les termes ont pour facteur commun x^m, on pourra donner à la formule, cette autre forme : $(x+a)^m = x^m \left(1 + \frac{ma}{x} + m \cdot \frac{m-1}{2} \frac{a^2}{x^2} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \frac{a^3}{x^3}\right.$ $\left. + \text{\&c.}\right)$ dans laquelle x^m est censé multiplier tout ce qui est entre deux crochets. De-là nous concluons la règle suivante, pour former d'une manière commode la suite ou série des termes qui doivent composer la puissance m du binome $x+a$.

151. Écrivez sur une première ligne, comme il suit, les quantités.

$$m, \frac{m-1}{2}, \frac{m-2}{3}, \frac{m-3}{4}, \frac{m-4}{5}, \text{\&c.}$$

$$1 + m\frac{a}{x} + m \cdot \frac{m-1}{2} \frac{a^2}{x^2} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \frac{a^3}{x^3} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \frac{a^4}{x^4}, \text{\&c.}$$

Et ayant écrit l'unité au-dessous & à une place plus avant sur la gauche, formez la suite inférieure, par cette loi. . . . .

Multipliez cette unité par le premier terme de la

ſuite ſupérieure & par $\frac{a}{x}$, & vous aurez le ſecond terme de la ſérie inférieure.

Multipliez ce ſecond terme, par le ſecond terme de la ſuite ſupérieure & encore par $\frac{a}{x}$, & vous aurez le troiſième terme de la ſérie inférieure.

Multipliez ce troiſième terme, par le troiſième de la ſuite ſupérieure & encore par $\frac{a}{x}$, & vous aurez le quatrième terme de la ſérie inférieure; & ainſi de ſuite.

Réuniſſez tous ces termes de la ſérie inférieure, & multipliez la totalité par x^m, vous aurez la valeur de $(x + a)^m$.

152. Si au lieu de $x + a$, on avoit $x^2 + a^2$, ou $x^3 + a^3$ ou, &c.; au lieu de multiplier ſucceſſivement par $\frac{a}{x}$, on multiplieroit par $\frac{a^2}{x^2}$ dans le premier cas, par $\frac{a^3}{x^3}$ dans le ſecond, & en général par le ſecond terme du binome diviſé par le premier: & on multiplieroit la totalité, dans le premier cas, par x^2 élevé à la puiſſance m; & dans le ſecond cas, par x^3, élevé à la puiſſance m; c'eſt-à-dire, en général, par le premier terme du binome, élevé à la puiſſance propoſée.

Enfin ſi le ſecond terme du binome, au lieu d'avoir

le signe +, avoit le signe —, au lieu de multiplier successivement par $\frac{a}{x}$, lorsqu'on a $x + a$, ou par $\frac{a^2}{x^2}$, lorsqu'on a $x^2 + a^2$, on multiplieroit successivement par $-\frac{a}{x}$, ou par $-\frac{a^2}{x^2}$, & ainsi de suite.

Supposons, pour donner un exemple, qu'on demande la sixième puissance de $x^3 + a^3$; je procède comme ci-dessous.

$$6 \quad \tfrac{5}{2} \quad \tfrac{4}{3} \quad \tfrac{3}{4} \quad \tfrac{2}{5} \quad \tfrac{1}{6}$$

$$1 + \frac{6a^3}{x^3} + \frac{15a^6}{x^6} + \frac{20a^9}{x^9} + \frac{15a^{12}}{x^{12}} + \frac{6a^{15}}{x^{15}} + \frac{a^{18}}{x^{18}}$$

C'est-à-dire, qu'ayant écrit la suite 6, $\frac{5}{2}$, $\frac{4}{3}$ &c., qui répond à m, $\frac{m-1}{2}$, $\frac{m-2}{3}$, $\frac{m-3}{4}$, &c., & ayant écrit, au-dessous, l'unité, pour premier terme de la seconde suite; je multiplie ce premier terme, par le premier terme 6 de la suite supérieure, & par $\frac{a^3}{x^3}$, ce qui me donne $\frac{6a^3}{x^3}$ pour le second terme. Je multiplie $\frac{6a^3}{x^3}$ par le second terme $\frac{5}{2}$ de la suite supérieure, & par $\frac{a^3}{x^3}$, & j'ai $\frac{15a^6}{x^6}$ pour troisième terme, & ainsi de suite. Enfin je multiplie la totalité des termes formés suivant cette loi, par x^3 élevé à la puissance 6, c'est-à-dire (123), par x^{18}, & j'ai $x^{18} + \frac{6a^3x^{18}}{x^3} + \frac{15a^6x^{18}}{x^6} + \frac{20a^9x^{18}}{x^9} + \frac{15a^{12}x^{18}}{x^{12}} + \frac{6a^{15}x^{18}}{x^{15}} + \frac{a^{18}x^{18}}{x^{18}}$, qui se réduit à $x^{18} + 6a^3x^{15} + 15a^6x^{12} + 20a^9x^9 + 15a^{12}x^6 + 6a^{15}x^3 + a^{18}$.

153. Si au lieu d'un binome on avoit un trinome à élever

à une puissance proposée; si l'on avoit, par exemple, $a + b + c$ à élever à la troisième puissance, on feroit $b + c = m$, & l'on auroit $a + m$ à élever à la troisième puissance, qui selon les règles qu'on vient de donner, feroit $a^3 + 3a^2m + 3am^2 + m^3$. Remettant maintenant, au lieu de m sa valeur $b + c$, on auroit $a^3 + 3a^2(b + c) + 3a(b + c)^2 + (b + c)^3$. Or les puissances $(b + c)$, $(b + c)^2$, $(b + c)^3$ étant toutes des puissances de binome, se trouveront également par les règles précédentes; il ne s'agira plus que de les multiplier respectivement par $3a^2$, $3a$ & 1. En achevant le calcul, on trouvera $a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 6abc + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$.

154. Mais en réfléchissant un peu sur la règle de l'élévation des binomes, on verra qu'on peut former la puissance d'un polynome quelconque, d'une manière plus commode en observant la règle suivante.

Supposons qu'on veut élever le trinome $a + b + c$ à la troisième puissance. Faites $b + c = p$, & alors il s'agit d'élever $a + p$ à la puissance 3, ce qui donnera. . . . .

$$a^3 + 3a^2\underset{1}{p} + 3a\underset{2}{p^2} + \underset{3}{p^3}.$$

J'écris sous chaque terme de cette quantité, l'exposant de p; je multiplie chaque terme par le nombre qui lui répond, & je change un p en b, ce qui donne. . . . . .

$$3a^2b + 6ab\underset{\frac{1}{2}}{p} + 3b\underset{\frac{2}{2}}{p^2}.$$

J'écris sous cette quantité la moitié de chaque exposant de p, & je multiplie chaque terme par le nombre correspondant, changeant encore un p en b, j'ai. . . . .

$$3ab^2 + 3b^2\underset{\frac{1}{3}}{p}.$$

J'écris ſous chaque terme de celle-ci le tiers de l'expoſant de p; je multiplie comme ci-devant, & je change un p en b; j'ai. . . . . b^3.

Enfin je réunis toutes ces quatre lignes en changeant p en c, & j'ai $a^3 + 3a^2c + 3ac^2 + c^3 + 3a^2b + 6abc + 3bc^2 + 3ab^2 + 3b^2c + b^3$, de même que ci-deſſus.

Ainſi on multipliera chaque terme de la première ligne, par l'expoſant de p; chaque terme de la ſeconde, par la moitié de l'expoſant de p dans cette ſeconde; chaque terme de la troiſième, par le tiers de l'expoſant de p dans cette troiſième, & ainſi de ſuite, obſervant à chaque ligne, à commencer de la ſeconde, de changer un p en b, & à la fin on changera tous les p reſtans, en c. Cette règle s'applique de même aux quadrinomes, quintinomes, &c.

De l'Extraction des Racines des quantités complexes.

155. Lorſqu'une fois on eſt en état de trouver tous les termes dont une puiſſance propoſée d'un binome doit être compoſée, il eſt aiſé d'en conclure la méthode d'extraire une racine d'un degré propoſé, ſoit que la quantité dont il s'agit ſoit littérale, ſoit qu'elle ſoit numérique: ce que nous allons dire ſur la racine cinquième ſuffira pour faire comprendre comment on doit ſe conduire dans les autres degrés.

Selon la formule des puiſſances d'un binome, la

cinquième puissance de $a + b$, est $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$. De ces six termes les deux premiers suffisent pour établir la règle que nous cherchons.

Le premier est la cinquième puissance du premier terme du binome, & le second est le quintuple de la quatrième puissance de ce même premier terme, multipliée par le second terme; donc pour avoir le premier terme de la racine, il faut, après avoir ordonné tous les termes de la puissance donnée, extraire la racine cinquième, du premier terme de cette puissance; & pour avoir le second terme de la racine, il faut diviser le second terme de la quantité proposée, par le quintuple de la quatrième puissance de la racine qu'on vient de trouver par la première opération. En effet, il est évident que la racine cinquième de a^5 est a, qui est le premier terme du binome, dont la quantité $a^5 + 5a^4b +$ &c. est la cinquième puissance; & il est également évident que $\frac{5a^4b}{5a^4}$ donne b qui est le second terme de ce binome. Mais comme il pourroit se faire que la quantité proposée ne fût pas une puissance parfaite du cinquième degré; après avoir ainsi trouvé le second terme de la racine, il faudra vérifier cette racine en l'élevant au cinquième degré & retranchant le résultat, de la quantité proposée; voici un exemple.

On demande la racine cinquième de . . . .

$32a^5 + 240a^4b + 720a^3b^2 + 1080a^2b^3 + 810ab^4 + 243b^5$	Racine
$- 32a^5$	$2a + 3b$
Reste. $+ 240a^4b + 720a^3b^2 + 1080a^2b^3 + 810ab^4 + 243b^5$	$80a^4$

Je tire la racine cinquième de $32a^5$, elle est $2a$ que j'écris à la racine.

J'élève $2a$ à la cinquième puissance, & j'écris le produit $32a^5$ avec un signe contraire, sous le premier terme $32a^5$ de la quantité proposée, ce qui le détruit.

J'élève la racine $2a$ à la quatrième puissance, ce qui me donne $16a^4$ que je quintuple, & j'ai $80a^4$ que j'écris sous la racine $2a$; je m'en sers pour diviser le premier terme $240a^4b$ du reste; la division faite, j'ai pour quotient $3b$ que j'écris à la racine; ensorte que j'ai $2a + 3b$ pour la racine cherchée; mais pour m'en assurer davantage, j'élève $2a + 3b$ à la cinquième puissance; je retrouve les mêmes termes que dans la quantité proposée; faisant la soustraction, il ne reste rien; d'où je conclus que la racine est exactement $2a + 3b$.

S'il devoit y avoir encore un autre terme à la racine, alors il y auroit un reste, après cette première opération: je regarderois $2a + 3b$ comme une seule quantité, avec laquelle j'opérerois pour trouver le troisième terme, comme j'ai opéré avec $2a$ pour trouver le second.

156. A l'égard des quantités numériques, la règle est absolument la même; la seule chose qu'il faille éclaircir, est, à quel caractère on reconnoîtra ce qui répond au premier terme a^5 & ce qui répond au terme $5a^4b$:

Pour ſe conduire dans cette recherche, il n'y a qu'à imaginer que dans le binome $a+b$, a marque les dixaines & b les unités; alors il eſt évident que a^5 ſera des centaines de mille, parce que la cinquième puiſſance de 10 eſt 100000; donc le premier terme a^5, ou la quantité dont il faudra tirer la racine 5e, pour avoir le premier chiffre de la racine, ne peut faire partie des cinq derniers chiffres ſur la droite; on ſéparera donc les cinq derniers chiffres, & ſuppoſé qu'il en reſte cinq ſeulement ou moins de cinq ſur la gauche, on en cherchera la racine 5e, qui ſera facile à trouver, ne pouvant avoir qu'un ſeul chiffre.

Quand on aura trouvé le premier chiffre de la racine & qu'on aura retranché ſa cinquième puiſſance, de la quantité qui a ſervi à trouver cette racine, on abaiſſera, à côté du reſte, les cinq chiffres ſéparés: & pour avoir la partie qu'il faut diviſer par $5a^4$, c'eſt-à-dire, par le quintuple de la quatrième puiſſance des dixaines trouvées, il faudra ſéparer quatre chiffres ſur la droite, & ne diviſer que la partie reſtante à gauche: car $5a^4b$, qui eſt la partie qu'on doit diviſer par $5a^4$, pour avoir b, ne peut faire partie des quatre derniers chiffres, puiſqu'étant le produit de $5a^4$ par b, elle doit être au moins des dixaines de mille, puiſque a^4 eſt des dixaines de mille.

Ces éclairciſſemens poſés, le procédé eſt le même que pour l'extraction littérale; voici un exemple.

On demande la racine cinquième de. . . . .

```
3802.04032 { 52
 3125
  6770.4032
  3125
 380204032
         0
```

Je ſépare les cinq derniers chiffres 04032, & je cherche la racine cinquième de 3802 qui ayant moins de 5 chiffres, ne peut donner qu'un chiffre pour cette racine; elle eſt 5 que j'écris à côté.

J'élève 5 à la cinquième puiſſance, & j'écris le produit ſous 3802 pour l'en retrancher; il reſte 677, à côté duquel j'abaiſſe les cinq chiffres ſéparés d'abord; du total, je ſépare 4 chiffres ſur la droite, & je diviſe la partie reſtante 6770, par le quintuple de la quatrième puiſſance de la racine trouvée 5, c'eſt-à-dire, par 5 fois 625, ou 3125. Je trouve pour quotient 2, que j'écris à côté du premier chiffre trouvé 5. Pour vérifier cette racine 52, je l'élève à la cinquième puiſſance, & je trouve le nombre même propoſé, d'où je conclus que 52 eſt exactement la racine.

S'il y avoit un reſte, & qu'on voulût approcher plus près de la racine, on mettroit 5 zéros, & on continueroit pour avoir le troiſième chiffre, qui ſeroit une décimale, comme on a fait pour avoir le ſecond.

En général, pour tirer une racine de degré quelconque m, il faut ſéparer en allant de droite à gauche,

en tranches de *m* chiffres chacune, dont la plus à gauche peut en avoir moins. Tirer la racine du degré *m* de cette dernière tranche : cette racine n'aura jamais qu'un ſeul chiffre : à côté du reſte, deſcendre la tranche ſuivante, en ſéparer $m - 1$ chiffres ſur la droite, & diviſer la partie reſtante à gauche, par *m* fois la racine trouvée, & élevée à la puiſſance $m - 1$; & ainſi de ſuite. Cela eſt fondé ſur ce que les deux premiers termes d'un binome $a + b$ élevé à la puiſſance quelconque *m*, ſont $a^m + ma^{m-1}b$, & ſur ce que ſi *a* marque des dixaines & *b* des unités, a^m ne peut faire partie des *m* derniers chiffres & $ma^{m-1}b$, ne peut faire partie de $m - 1$ derniers.

De la manière d'approcher de la racine des puiſſances imparfaites des quantités littérales.

157. Lorſque la quantité complexe propoſée n'eſt point une puiſſance parfaite du degré dont on demande la racine, alors il n'y a point de racine exacte à eſpérer : il faut ſe borner à en approcher auſſi près que peut l'exiger la queſtion pour laquelle cette extraction eſt néceſſaire. On pourroit y parvenir en ſuivant la méthode que nous venons d'expoſer pour les puiſſances parfaites : elle donneroit

une ſuite de termes fractionnaires dont la valeur décroiſſant continuellement, permet de ſe borner à un nombre limité de termes & de négliger les autres : mais l'opération ſeroit longue & pénible. On peut parvenir au même réſultat par une voie beaucoup plus courte, en employant la règle que nous avons donnée ci-deſſus (151) pour élever un binome à une puiſſance propoſée. Pour cet effet, il faut ſe rappeler (133) que toute racine peut être repréſentée par une puiſſance fractionnaire. Ainſi, demander la racine quarrée de $a+b$, ou d'évaluer $\sqrt{(a+b)}$, c'eſt demander d'élever $a+b$ à la puiſſance $\frac{1}{2}$, puiſque (133) $(a+b)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(a+b)}$.

Donc, ſuivant la règle donnée (151), j'écris la ſuite.

$$\tfrac{1}{2},\ \frac{\frac{1}{2}-1}{2},\ \frac{\frac{1}{2}-2}{3},\ \frac{\frac{1}{2}-3}{4},\ \frac{\frac{1}{2}-4}{5},\ \text{\&c.}$$

Qui ſe réduit à . . . $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{5}{8}, -\frac{7}{10}$, &c.

Et poſant 1 pour premier terme de la ſeconde ſuite, je forme cette ſeconde . . . .

$$1 + \frac{1}{2}\frac{b}{a} - \frac{1}{8}\frac{b^2}{a^2} + \frac{1}{16}\frac{b^3}{a^3} - \frac{5}{128}\frac{b^4}{a^4} + \frac{35}{1280}\frac{b^5}{a^5},\ \text{\&c.}$$

En multipliant le premier terme 1, par le premier terme $\frac{1}{2}$ de la première ſuite, & par $\frac{b}{a}$, c'eſt-à-dire par le ſecond terme du binome $a+b$, diviſé par le premier ; j'ai $\frac{1}{2}\frac{b}{a}$ pour le ſecond terme.

Je forme de même le troiſième, en multipliant ce ſecond, par le ſecond terme $-\frac{1}{4}$ de la première ſuite, &

par $\frac{b}{a}$, ce qui me donne $-\frac{1}{8}\frac{b^2}{a^2}$ pour le troisième terme.

Pour le quatrième, je multiplie ce troisième, par le troisième terme $-\frac{1}{2}$ de la première suite & par $\frac{b}{a}$, & j'ai $+\frac{1}{16}\frac{b^3}{a^3}$ pour quatrième terme, & ainsi de suite.

Enfin je multiplie la totalité de ces termes, par le premier terme du binome, élevé à la puissance $\frac{1}{2}$, & j'ai pour la valeur de $(a+b)^{\frac{1}{2}}$ ou de $\sqrt{(a+b)}$, la quantité suivante :

$$a^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2}\frac{b}{a}-\frac{1}{8}\frac{b^2}{a^2}+\frac{1}{16}\frac{b^3}{a^3}-\frac{5}{128}\frac{b^4}{a^4}+\frac{35}{1280}\frac{b^5}{a^5},\text{ \&c.}\right)$$

qu'il est facile de prolonger autant qu'on le jugera à propos.

158. Nous verrons, par la suite, l'usage de ces sortes d'approximations; pour le présent, nous nous contenterons de faire voir par un exemple en nombres, comment on peut les employer pour approcher des racines des quantités numériques. Supposons qu'on veut avoir la racine quarrée de 101. Je partagerai 100 en deux parties, dont l'une soit un quarré, le plus grand qu'il sera possible; par exemple, je le partage en ces deux parties, 100 & 1; je prends la première pour a, & la seconde pour b, ensorte que je suppose $a = 100$ & $b = 1$; par conséquent $a^{\frac{1}{2}} = (100)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{100} = 10$; & $\frac{b}{a} = \frac{1}{100} = 0{,}01$; donc la série qui exprime $\sqrt{(a+b)}$, c'est-à-dire ici $\sqrt{101}$, deviendra, en mettant pour $a^{\frac{1}{2}}$ & $\frac{b}{a}$, leurs valeurs,

$$10\left(1+\frac{0{,}01}{2}-\frac{(0{,}01)^2}{8}+\frac{(0{,}01)^3}{16}-\frac{5(0{,}01)^4}{128}+\frac{35(0{,}01)^5}{1280},\text{ \&c.}\right)$$

Supposons qu'on veuille avoir cette racine jusqu'à un dix millième près seulement ; alors il suffira de prendre les trois premiers termes ; car le quatrième qui est $\frac{(0{,}01)^3}{16}$ revient à $\frac{0{,}000001}{16}$, c'est-à-dire, à 0,0000000625 ; & quoiqu'il doive être multiplié par 10 qui doit multiplier tous les termes de la série, il ne produira que 0,000000625 qui est bien au-dessous d'un dix millième. Les termes suivans sont, à plus forte raison, beaucoup au-dessous, puisqu'étant continuellement multipliés par 0,01 qui est une fraction, ils doivent diminuer continuellement ; car en multipliant par une fraction, on ne prend (*Arith.* 120) qu'une partie du multiplicande.

La valeur de $\sqrt{101}$ se réduit donc à........... $10\left(1+\frac{0{,}01}{2}-\frac{(0{,}01)^2}{8}\right)$, c'est-à-dire, à $10\,(1+0{,}005-0{,}0000125)$, ou $10 \times 1{,}0049875$, ou 10,049875 ; c'est-à-dire, 10,0499 en se bornant aux dix millièmes.

Cette méthode peut s'appliquer à toutes sortes de racines & à toutes sortes de quantités ; nous en donnerons encore un exemple sur $\sqrt[5]{(a^5-x^5)}$. Je change donc cette quantité en $(a^5-x^5)^{\frac{1}{5}}$, & procédant comme ci-dessus, j'écris

$$\tfrac{1}{5},\ \frac{\frac{1}{5}-1}{2},\ \frac{\frac{1}{5}-2}{3},\ \frac{\frac{1}{5}-3}{4},\ \frac{\frac{1}{5}-4}{5},\ \&c.$$

ou $\frac{1}{5},\ -\frac{2}{5},\ -\frac{3}{5},\ -\frac{7}{10},\ -\frac{19}{25}$, &c.

Et posant 1, pour premier terme de la seconde suite, je forme cette seconde,

$$1-\tfrac{1}{5}\frac{x^5}{a^5}-\tfrac{2}{25}\frac{x^{10}}{a^{10}}-\tfrac{6}{125}\frac{x^{15}}{a^{15}}-\tfrac{42}{1250}\frac{x^{20}}{a^{20}}-\tfrac{798}{31250}\frac{x^{25}}{a^{25}},\ \&c.$$

En multipliant le premier terme 1, par le premier

terme $\frac{1}{5}$, de la suite supérieure, & par $-\frac{x^5}{a^5}$, c'est-à-dire par le second terme du binome, divisé par le premier; ce qui donne $-\frac{1}{5}\frac{x^5}{a^5}$ pour second terme de la série.

Pour avoir le troisième, je multiplie celui-ci par le second terme $-\frac{2}{5}$, de la suite supérieure, & par $-\frac{x^5}{a^5}$, ce qui me donne $\frac{-2x^{10}}{25a^{10}}$.

En calculant de même les suivans jusqu'au sixième, & multipliant le tout par le premier terme a^5 du binome, élevé à la puissance $\frac{1}{5}$, c'est-à-dire (96) par $a^{5\times\frac{1}{5}}$ ou par a, j'ai pour valeur approchée de $\sqrt[5]{(a^5-x^5)}$, la quantité $a(1-\frac{x^5}{5a^5}-\frac{2x^{10}}{25a^{10}}-\frac{6x^{15}}{125a^{15}}-\frac{42x^{20}}{1250a^{20}}$, &c.)

159. Observons à l'égard de ces séries & de toutes les autres qu'on peut former de la même manière, qu'on doit toujours prendre pour premier terme de la quantité proposée, le plus grand terme, par exemple, dans $\sqrt{(a+b)}$ nous avons pris ci-dessus a pour premier terme; mais si b étoit plus grand que a, il auroit fallu prendre b pour premier terme. La raison en est que losque b est plus grand que a, la première série $a^{\frac{1}{2}}(1+\frac{1}{2}\frac{b}{a}-\frac{1}{8}\frac{b^2}{a^2}$, &c.) est trompeuse; car $\frac{b}{a}$ étant alors plus grand que l'unité, les termes suivans qui sont continuellement multipliés par $\frac{b}{a}$ vont toujours en augmentant, en sorte qu'on n'a aucune raison de s'arrêter après un certain

certain nombre de termes. Mais ſi dans ce même cas on forme la ſérie en prenant b pour premier terme, on aura $b^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2}\frac{a}{b}-\frac{1}{8}\frac{a^2}{b^2}, \&c.\right)$ dans laquelle les termes vont en décroiſſant.

Les ſéries dont les termes vont en augmentant de valeur à meſure qu'ils s'éloignent de l'origine, s'appellent *ſéries divergentes ;* & au contraire on appelle *ſéries convergentes* celles dont les termes diminuent de valeur à meſure qu'ils s'éloignent de l'origine.

160. Nous avons vu (141) que toute fraction algébrique pouvoit être miſe ſous la forme d'un entier, en faiſant paſſer ſon dénominateur au numérateur avec un expoſant négatif. Cette obſervation nous fournit le moyen de réduire en ſérie toute fraction dont le dénominateur ſeroit complexe, ce qui ſera utile par la ſuite.

Par exemple, ſi j'avois $\frac{a^2}{a^2-x^2}$; au lieu de cette quantité, j'écrirois $a^2 \times (a^2-x^2)^{-1}$, & alors j'éleverois a^2-x^2 à la puiſſance -1 ſelon la règle donnée (128); c'eſt-à-dire, que je poſerois d'abord la ſérie -1, $\frac{-1-1}{2}$, $\frac{-1-2}{3}$, $\frac{-1-3}{4}$, &c. ou -1, -1, -1, -1.

Et je formerois la ſérie ſuivante :

$$1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^4}{a^4}+\frac{x^6}{a^6}+\frac{x^8}{a^8}, \&c.$$

en multipliant le premier terme 1 de cette seconde, par le premier terme -1 de la série supérieure & par $-\frac{x^2}{a^2}$, ce qui donneroit $+\frac{x^2}{a^2}$; multipliant celui-ci par le second terme -1 de la série supérieure, & par $-\frac{x^2}{a^2}$, & ainsi de suite. Après quoi je multiplierois la totalité, par le premier terme a^2 élevé à la puissance -1, c'est-à-dire (96) par $a^{2\times -1}$ ou a^{-2}, ce qui me donneroit. . . . .

$$a^{-2}\left(1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^4}{a^4}+\frac{x^6}{a^6}+\frac{x^8}{a^8}, \&c.\right)$$

pour valeur de $(a^2-x^2)^{-1}$; donc pour avoir $a^2(a^2-x^2)^{-1}$, il ne s'agit plus que de multiplier par a^2; or $a^{-2}\times a^2$ donnant a^{2-2}, ou a^0, qui se réduit à 1; on aura donc

$$a^2(a^2-x^2)^{-1}=1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^4}{a^4}+\frac{x^6}{a^6}+\frac{x^8}{a^8}, \&c.$$

On s'y prendroit de même pour réduire en série $\frac{a^2}{(a^2+x^2)^3}$; on considéreroit cette quantité comme $a^2(a^2+x^2)^{-3}$. Pareillement au lieu de $\frac{a^2}{\sqrt[5]{(a^2+x^2)^3}}$, on écriroit $\frac{a^2}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{5}}}$, & ensuite $a^2(a^2+x^2)^{-\frac{3}{5}}$, & ainsi des autres.

161. Nous avons supposé (149) que la même formule qui servoit pour former les puissances parfaites d'un binome, pouvoit aussi servir pour en former les puissances imparfaites. Comme les principes sur lesquels cette formule est fondée, supposent que l'exposant est un nombre entier positif, on pourroit douter qu'on pût l'appliquer légitimement au cas où cet exposant est fractionnaire positif ou négatif, ou entier négatif. Voici comment on peut se convaincre que la même formule peut servir dans tous ces cas. Soit en général $(a+b)^{\frac{m}{n}}$, $\frac{m}{n}$ étant positif, on aura (151). . . . .

$$(a+b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}}\left(1 + \frac{m}{n}\cdot\frac{b}{a} + \frac{m}{n}\cdot\frac{\frac{m}{n}-1}{2}\cdot\frac{b^2}{a^2} + \frac{m}{n}\cdot\frac{\frac{m}{n}-1}{2}\cdot\frac{\frac{m}{n}-2}{3}\cdot\frac{b^3}{a^3}\ \&c.\right)$$

Faisons, pour abréger, la somme de tous les termes de cette série, excepté le premier, égale à p; c'est-à-dire, faisons

$$p = \frac{m}{n}\cdot\frac{b}{a} + \frac{m}{n}\cdot\frac{\frac{m}{n}-1}{2}\frac{b^2}{a^2} + \frac{m}{n}\cdot\frac{\frac{m}{n}-1}{2}\cdot\frac{\frac{m}{n}-2}{3}\frac{b^3}{a^3};$$

alors nous aurons $(a+b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}}(1+p)$; élevons chaque membre à la puissance n, & (123) nous aurons $(a+b)^{\frac{mn}{n}} = a^{\frac{mn}{n}}(1+p)^n$, c'est-à-dire, $(a+b)^m = a^m(1+p)^n$; or nous savons que $(a+b)^m$, a pour valeur. . . . .

$$a^m\left(1 + m\frac{b}{a} + m\cdot\frac{m-1}{2}\frac{b^2}{a^2} + m\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\frac{b^3}{a^3},\ \&c.\right)$$

Si donc $a^m(1+p)^n$ revient à cette quantité, ce sera une preuve, la dernière égalité ayant lieu, que toutes celles dont elle est déduite, ont lieu; & que par conséquent la valeur de $(a+b)^{\frac{m}{n}}$ doit être telle que la donne la première équation.

Voyons donc si $a^m(1+p)^n$ revient au même que $(a+b)^m$. Or $(1+p)^n = 1 + np + n\cdot\frac{n-1}{2}p^2 + n\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}p^3 + \&c.$

Substituons, dans ce second membre, au lieu de p, sa valeur; mais pour ne pas embrasser trop de calcul à la fois, ne tenons compte dans cette substitution que des termes qui ne passeront pas le cube; nous aurons donc

$$p = \frac{m}{n}\frac{b}{a} + \frac{m}{n}\cdot\frac{\frac{m}{n}-1}{2}\frac{b^2}{a^2} + \frac{m}{n}\cdot\frac{\frac{m}{n}-1}{2}\cdot\frac{\frac{m}{n}-2}{3}\frac{b^3}{a^3} + \&c.$$

$$pp = \frac{m^2}{n^2}\frac{b^2}{a^2} + \frac{2m^2}{n^2}\cdot\frac{\frac{m}{n}-1}{2}\cdot\frac{b^3}{a^3} + \&c.$$

$$p^3 = \frac{m^3}{n^3}\frac{b^3}{a^3};$$

par conséquent $1 + np + n.\frac{n-1}{2}p^2 + n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}p^3$, &c.

deviendra $1 + m\frac{b}{a} + m\frac{\frac{m}{n}-1}{2}\frac{b^2}{a^2} + m.\frac{\frac{m}{n}-1}{2}.\frac{\frac{m}{n}-2}{3}.\frac{b^3}{a^3}$ + &c.

$+ \frac{m^2}{n}.\frac{n-1}{2}.\frac{b^2}{a^2} + \frac{2m^2}{n}.\frac{\frac{m}{n}-1}{2}.\frac{n-1}{2}.\frac{b^3}{a^3}$ + &c.

$+ \frac{m^3}{n^2}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\frac{b^3}{a^3}$ + &c.

Or $m.\frac{\frac{m}{n}-1}{2} + \frac{m^2}{n}.\frac{n-1}{2}$, qui est la totalité de ce qui multiplie $\frac{b^2}{a^2}$, se réduit à $m\left(\frac{m-n}{2n} + \frac{mn-m}{2n}\right)$, ou $m.\frac{mn-n}{2n}$, ou enfin à $m.\frac{m-1}{2}$.

Pareillement, $m.\frac{\frac{m}{n}-1}{2}.\frac{\frac{m}{n}-2}{3} + \frac{2m^2}{n}.\frac{\frac{m}{n}-1}{2}.\frac{n-1}{2} + \frac{m^3}{n^2}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}$, qui est la totalité de ce qui multiplie $\frac{b^3}{a^3}$, se réduit à $m.\left(\frac{m-n}{2n}.\frac{m-2n}{3n} + \frac{m}{n}.\frac{m-n}{n}.\frac{n-1}{2} + \frac{m^2}{n^2}.\frac{(n-1)}{2}.\frac{(n-2)}{3}\right)$ ou $m.\left(\frac{(m-n).(m-2n)+3m.(m-n).(n-1)+m^2.(n-1).(n-2)}{2n\times 3n}\right)$ ou (en faisant les opérations indiquées, & les réductions), à $m.\left(\frac{m^2-3m+2}{2\times 3}\right)$, qui est la même chose que $m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}$; donc la quantité $1 + np + n.\frac{n-1}{2}p^2 + n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}p^3$ &c. revient à $1 + \frac{mb}{a} + m.\frac{m-1}{2}\frac{b^2}{a^2} + m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}\frac{b^3}{a^3}$ + &c.

Et si au lieu de se borner aux termes qui ne passent pas le cube, on poursuivoit plus loin, on trouveroit de-même que les termes suivans de cette série sont $m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.\frac{m-3}{4}\frac{b^4}{a^4}$, $m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.\frac{m-3}{4}.\frac{m-4}{5}\frac{b^5}{a^5}$ &c.

Donc $a^m(1+np+n.\frac{n-1}{2}p^2+n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}p^3+$ &c.) revient à $a^m(1+\frac{mb}{a}+m.\frac{m-1}{2}\frac{b^2}{a^2}+m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}\frac{b^3}{a^3}+$&c.).

Donc l'équation $(a+b)^m=a^m(1+p)^n$ est vraie; donc aussi l'équation $(a+b)^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{m}{n}}(1+p)$, dont celle-là a été déduite, ou (ce qui revient au même), l'équation. . . .

$$(a+b)^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{m}{n}}(1+\frac{m}{n}\frac{b}{a}+\frac{m}{n}.\frac{\frac{m}{n}-1}{2}\frac{b^2}{a^2}+\frac{m}{n}.\frac{\frac{m}{n}-1}{2}.\frac{\frac{m}{n}-2}{3}.\frac{b^3}{a^3}\text{\&c.})$$

est vraie. Donc la formule qui sert à élever à une puissance dont l'exposant est un nombre entier positif, peut servir aussi à élever à une puissance dont l'exposant est un nombre fractionnaire positif.

Pour faire voir que la même formule peut être employée, lorsque l'exposant est négatif, il faut remarquer que si nous représentons par T la totalité des termes que donneroit $(a+b)^{\frac{-m}{n}}$ en le développant suivant la même règle (151), on aura $(a+b)^{\frac{-m}{n}}=T$, c'est-à-dire, $\frac{1}{(a+b)}^{\frac{m}{n}}=T$ (142); & par conséquent $1=T\times(a+b)^{\frac{m}{n}}$, il faut donc prouver que si l'on multiplie la somme T des termes que donnera $(a+b)^{\frac{-m}{n}}$ évalué selon la règle que nous avons donnée (151), si on la multiplie, dis-je, par la valeur de $(a+b)^{\frac{m}{n}}$, le produit se réduira à l'unité. Or $(a+b)^{\frac{-m}{n}}$ donneroit suivant cette règle

$$a^{\frac{-m}{n}}(1-\frac{m}{n}\frac{b}{a}+\frac{m}{n}.\frac{\frac{m}{n}+1}{2}\frac{b^2}{a^2}-\frac{m}{n}.\frac{\frac{m}{n}+1}{2}.\frac{\frac{m}{n}+2}{3}\frac{b^3}{a^3}\text{ \&c.}$$

Et $(a+b)^{\frac{m}{n}}$ donnera

$$a^{\frac{m}{n}}\left(1+\frac{m}{n}\frac{b}{a}+\frac{m}{n}\cdot\frac{\frac{m}{n}-1}{2}\cdot\frac{b^2}{a^2}+\frac{m}{n}\cdot\frac{\frac{m}{n}-1}{2}\cdot\frac{\frac{m}{n}-2}{3}\cdot\frac{b^3}{a^3}\text{ \&c.}\right.$$

Multipliant ces deux quantités l'une par l'autre, & se bornant au cube de $\frac{b}{a}$, on aura

$$a^{\frac{m}{n}-\frac{m}{n}}\left(1-\frac{m}{n}\frac{b}{a}+\frac{m}{n}\cdot\frac{\frac{m}{n}+1}{2}\frac{b^2}{a^2}-\frac{m}{n}\cdot\frac{\frac{m}{n}+1}{2}\cdot\frac{\frac{m}{n}+2}{3}\frac{b^3}{a^3},\text{ \&c.}\right.$$

$$+\frac{m}{n}\frac{b}{a}-\frac{m^2}{n^2}\frac{b^2}{a^2}+\frac{m^2}{n^2}\cdot\frac{\frac{m}{n}+1}{2}\cdot\frac{b^3}{a^3}\ldots\text{ \&c.}$$

$$+\frac{m}{n}\cdot\frac{\frac{m}{n}-1}{2}\frac{b^2}{a^2}-\frac{m^2}{n^2}\cdot\frac{\frac{m}{n}-1}{2}\cdot\frac{b^3}{a^3}\ldots\text{ \&c.}$$

$$+\frac{m}{n}\cdot\frac{\frac{m}{n}-1}{2}\cdot\frac{\frac{m}{n}-2}{3}\frac{b^3}{a^3}\text{ \&c.}$$

Or si l'on se donne la peine d'en faire le calcul, on verra que la somme des quantités qui multiplient $\frac{b}{a}$, de celles qui multiplient $\frac{b^2}{a^2}$, de celles qui multiplient $\frac{b^3}{a^3}$, se réduit à zéro ; & il en sera de même des puissances suivantes, si l'on pousse le calcul au-delà de $\frac{b^3}{a^3}$; donc ce produit se réduit à $a^{\frac{m}{n}-\frac{m}{n}}\times 1$ ou $a^0\times 1$ ou 1×1, c'est-à-dire, 1. Donc la formule peut servir dans tous les cas.

Des Équations à deux inconnues, lorsqu'elles passent le premier degré.

162. Une équation à une seule inconnue est dite du troisième, du quatrième, du cinquième, &c.

degré, lorſque la plus haute puiſſance de l'inconnue eſt la troiſième, la quatrième, la cinquième, &c.; mais outre cette puiſſance, une équation peut encore renfermer toutes les puiſſances inférieures ; ainſi $x^3 = 8$, $x^3 + 5x^2 = 4$, $x^3 + 6x^2 - 9x = 7$, ſont toutes des équations du troiſième degré.

Une équation à deux ou à un plus grand nombre d'inconnues eſt dite paſſer le premier degré, non-ſeulement lorſque l'une de ces inconnues paſſe le premier degré, mais encore lorſque quelques-unes de ces mêmes inconnues ſont multipliées entre elles; & en général, le degré s'eſtime par la plus forte ſomme que puiſſent faire les expoſans dans un même terme : l'équation $x^3 + y^3 = a^2 b$ eſt du troiſième degré; l'équation $bx^2 + x^2 y + ay^2 = ab^2$ eſt auſſi du troiſième degré, parce que les expoſans de x & de y dans le terme $x^2 y$ ſont 3 ; dans les autres termes, les expoſans ſont moindres.

163. Pour réſoudre les queſtions qui conduiſent à des équations à pluſieurs inconnues, & au-delà du premier degré, il faut, comme pour celles du premier degré, réduire ces équations à une ſeule qui ne renferme plus qu'une inconnue.

Si l'on a deux équations & deux inconnues, & que, dans l'une de ces équations, l'une des inconnues ne

paſſe pas le premier degré, *prenez la valeur de cette inconnue, comme ſi tout le reſte étoit connu ; ſubſtituez cette valeur dans l'autre équation, & vous aurez une nouvelle équation qui ne renfermera plus qu'une inconnue.*

Par exemple, ſi l'on me propoſoit cette queſtion ; trouver deux nombres dont la ſomme ſoit 12, & dont le produit ſoit 35. En repréſentant ces deux nombres par x & y, j'aurois $x + y = 12$, & $xy = 35$.

De la première je tire $x = 12 - y$; ſubſtituant dans la ſeconde équation, cette valeur de x, j'aurai $(12 - y)y = 35$ ou $12y - yy = 35$, équation du ſecond degré qui étant réſolue ſuivant les règles données (99 *& ſuiv.*), donnera $y = 6 \pm 1$, c'eſt-à-dire $y = 7$ ou $y = 5$; & puiſque $x = 12 - y$, on aura $x = 5$ ou $x = 7$; c'eſt-à-dire, que les deux nombres cherchés ſont 5 & 7 ou 7 & 5.

Pareillement, ſi j'avois les équations $x + 3y = 6$ & $x^2 + y^2 = 12$, de la première, je tirerois $x = 6 - 3y$; ſubſtituant dans la ſeconde, j'aurois $(6 - 3y)^2 + y^2 = 12$; faiſant l'opération indiquée, j'ai $36 - 36y + 9y^2 + y^2 = 12$; ou en paſſant tout d'un même côté, & réduiſant $10y^2 - 36y + 24 = 0$; équation du ſecond degré, qu'on peut réſoudre par les règles données (99 *& ſuiv.*)

Prenons pour troisième exemple, les deux équations $xy + y^2 = 5$ & $x^3 + x^2y = y^2 + 7$. La première donne $x = \frac{5-y^2}{y}$; substituant dans la seconde, on a $\left(\frac{5-y^2}{y}\right)^3 + \left(\frac{5-y^2}{y}\right)^2 y = y^2 + 7$ ou $\frac{(5-y^2)^3}{y^3} + \frac{(5-y^2)^2 y}{y^2} = y^2 + 7$. Pour chasser les fractions, il suffit ici de multiplier le second terme par y & le second membre par y^3, ce qui donne $(5-y^2)^3 + (5-y^2)^2 y^2 = y^5 + 7y^3$. Faisant les opérations indiquées, on a, $125 - 75y^2 + 15y^4 - y^6 + 25y^2 - 10y^4 + y^6 = y^5 + 7y^3$; passant tout dans le premier membre & réduisant, on a, après avoir changé les signes, $y^5 - 5y^4 + 7y^3 + 50y^2 - 125 = 0$, équation qui ne renferme plus que y, mais qui est du cinquième degré.

164. A l'occasion de cet exemple, nous ferons remarquer que lorsque quelques-uns des dénominateurs de l'équation ont quelques facteurs communs entre eux, on peut faire disparoître ces dénominateurs plus simplement que par la règle générale, en examinant par quelle quantité il faudroit multiplier ces dénominateurs pour qu'ils devinssent égaux. Cette remarque est analogue à celle que nous avons faite (48) au sujet des fractions. Par exemple, si j'avois l'équation $\frac{cx}{ab} + \frac{dx}{ac} = e$, je la changerois en $\frac{c^2x + bdx}{abc} = e$, en multipliant les deux termes de

la première fraction par c, & les deux termes de la deuxième, par b; alors chassant le dénominateur, j'aurois $c^2 x + b d x = a b c e$.

165. *Si dans l'une des équations, l'une des deux inconnues ne passe pas le second degré : prenez dans celle-ci la valeur du quarré de l'inconnue la moins élevée, & substituez-la dans l'autre, à la place du quarré de cette même inconnue & de ses puissances ; & continuez de substituer jusqu'à ce que cette inconnue ne se trouve plus qu'au premier degré. Alors tirez de cette dernière équation la valeur de cette même inconnue, & substituez-la dans la première.*

Par exemple, si j'avois $x^2 + 3y^2 = 6x$ & $2x^3 - 3y^2 = 8$, je prendrois, dans la première, la valeur de x^2 qui est $x^2 = 6x - 3y^2$; la substituant dans la seconde, j'aurois (en faisant attention que x^3 est $x^2 \times x$), $2(6x - 3y^2)x - 3y^2 = 8$, qui se réduit à $12x^2 - 6xy^2 - 3y^2 = 8$; comme il y a encore x^2 dans celle-ci, j'y substitue de nouveau, la même valeur de x^2 que ci-dessus, & j'ai $72x - 36y^2 - 6xy^2 - 3y^2 = 8$, équation dans laquelle x n'est plus qu'au premier degré.

J'en tire la valeur de x, & j'ai $x = \frac{39y^2 + 8}{72 - 6y^2}$; je substitue cette valeur dans la première équation $x^2 + 3y^2 = 6x$: il me vient $\left(\frac{39y^2 + 8}{72 - 6y^2}\right)^2 + 3y^2$

$= 6\left(\frac{39y^2+8}{72-6y^2}\right)$ ou $\frac{(39y^2+8)^2}{(72-6y^2)^2} + 3y^2 = \frac{234y^2+48}{72-6y^2}$

ou (164) $\frac{(39y^2+8)^2}{(72-6y^2)^2} + 3y^2 = \frac{(234y^2+48)(72-6y^2)}{(72-6y^2)^2}$, ou enfin, en chassant le dénominateur commun, $(39y^2+8)^2 + 3y^2(72-6y^2)^2 = (234y^2 + 48)(72-6y^2)$, équation dans laquelle il n'y a plus à faire que des multiplications & les réductions ordinaires.

166. Lorsque les équations sont de degrés plus élevés, on peut, en suivant une méthode analogue à celle que nous venons d'exposer, arriver aussi à l'équation qui ne renferme plus qu'une inconnue; mais il est difficile d'éviter un inconvénient qui accompagne alors cette méthode: cet inconvénient est de faire monter l'équation à un degré plus élevé qu'elle ne doit être. Nous allons exposer une méthode qui n'est pas sujette à cette difficulté.

167. Toute équation à deux inconnues peut être toujours mise sous cette forme... $Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} \ldots + T = 0$; m marquant le degré auquel x est élevé. En effet, on peut toujours faire une totalité des différens termes composés de y & des quantités connues qui multiplient chaque puissance de x, & représenter cette totalité par une seule lettre; par exemple, dans l'équation $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, qui peut généralement représenter toutes les équations du second degré à deux inconnues [car il ne peut s'y trouver d'autres puissances de ces inconnues]; on peut rassembler les termes en cette manière $ax^2 + (d + by)x + cy^2 + ey + f = 0$, & pour abréger, l'écrire ainsi; $Ax^2 + Bx + C = 0$, sauf

à remettre, au lieu de A, B, C, ce que ces lettres repréſentent, après qu'on aura fait, de l'équation $Ax^2 + Bx + C = 0$, l'uſage pour lequel on lui donne cette forme. Cela poſé ſoient donc. . . . .

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + Dx^{m-3} + \ldots T = 0$$
$$\&\ A'x^m + B'x^{m-1} + C'x^{m-2} + D'x^{m-3} + \ldots T' = 0$$

Les deux équations propoſées, dont il s'agit de chaſſer ou éliminer x. Je les ſuppoſe d'abord du même degré ; nous verrons enſuite ce qu'il faut faire quand elles ſont de différens degrés.

On multipliera la première par A', la ſeconde par A, & l'on retranchera le ſecond produit du premier, ce qui donnera une équation du degré $m - 1$.

On multipliera la première par $A'x + B'$, la ſeconde par $Ax + B$, & l'on retranchera le ſecond produit du premier, ce qui donnera une ſeconde équation du degré $m - 1$.

On multipliera la première par $A'x^2 + B'x + C'$, la ſeconde par $Ax^2 + Bx + C$, on retranchera le ſecond produit du premier, ce qui donnera une troiſième équation du degré $m - 1$.

On continuera de même juſqu'à ce que le multiplicateur ſoit devenu du degré $m - 1$.

Cela poſé, on aura m équations, chacune du degré $m - 1$. On conſidérera dans chacune, les différentes puiſſances x^{m-1}, x^{m-2}, x^{m-3}, &c. comme ſi elles étoient autant d'inconnues au premier degré. Par le moyen des $m - 1$ premières équations, ou en général par le moyen d'un

nombre $m - 1$ de ces équations, on déterminera (85) les valeurs de ces inconnues que l'on ſubſtituera dans la dernière. Cette opération donnera une équation ſans x, dans laquelle mettant pour A, B, & C, A', B', C', &c. les quantités que ces lettres repréſentent, & qui peuvent d'ailleurs renfermer telles puiſſances de y qu'on voudra, on aura l'équation en y.

Par exemple, ſi j'avois les deux équations

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$
$$A'x^2 + B'x + C' = 0$$

Qui peuvent repréſenter toutes les équations à deux inconnues, dans leſquelles l'une ſeulement des deux inconnues ne paſſe pas le ſecond degré; en multipliant la première par A', la ſeconde par A, retranchant le ſecond produit du premier & réduiſant, j'aurois $(A'B - AB')x + A'C - AC' = 0$.

Multipliant la première équation par $A'x + B'$, la ſeconde par $Ax + B$, retranchant le ſecond produit du premier, & réduiſant, j'aurois $(A'C - AC')x + B'C - BC' = 0$.

Prenant donc, dans la première, la valeur de x qui eſt $x = \frac{AC' - A'C}{A'B - AB'}$, & la ſubſtituant dans la deuxième, j'aurai $(A'C - AC') \times \frac{AC' - A'C}{A'B - AB'} + B'C - BC' = 0$. Ou [à cauſe que $AC' - A'C$ eſt la même choſe que $-(A'C - AC')$], j'aurai $\frac{-(A'C - AC')^2}{A'B - AB'} + B'C - BC' = 0$, ou enfin $-(A'C - AC')^2 + (A'B - AB')(B'C - BC') = 0$.

Si l'on avoit les deux équations. . . . .

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$
$$A'x^3 + B'x^2 + C'x + D' = 0.$$

Multipliant la première par A', la seconde par A, retranchant & réduisant, on auroit $(A'B - AB')x^2 + (A'C - AC')x + (A'D - AD') = 0$.

Multipliant la première par $A'x + B'$, la seconde par $Ax + B$, retranchant & réduisant; on auroit $(A'C - AC')x^2 + (A'D - AD' + B'C - BC')x + B'D - BD' = 0$.

Enfin multipliant la première par $A'x^2 + B'x + C'$, la seconde par $Ax^2 + Bx + C$, retranchant & réduisant, on auroit $(A'D - AD')x^2 + (B'D - BD')x + C'D - CD' = 0$.

Il ne s'agit plus maintenant, en considérant x^2 & x comme des inconnues au premier degré, que de déterminer leurs valeurs à l'aide de deux quelconques de ces trois équations du second degré, & de substituer ces valeurs dans la troisième.

168. Si les deux équations proposées n'étoient pas au même degré pour x; alors on opérera comme il suit.

Soient m & n les deux exposans, & m le plus grand. On multipliera l'équation du degré n, par x^{m-n}, ce qui les mettra toutes deux au même degré. Alors on opérera comme dans le cas précédent, en continuant les multiplications jusqu'à ce que le multiplicateur soit devenu du degré $n - 1$, ce qui donnera n équations, chacune du degré $m - 1$.

On substituera dans chacune & dans toutes les puissances supérieures à x^n, la valeur de x^n tirée de l'équation du degré n, & on continuera de substituer, jusqu'à ce que la plus haute puissance restante soit x^{n-1}, ce qui sera toujours possible ; alors on aura n équations chacune du degré $n - 1$. En employant $n - 1$ de ces équations, on déterminera les valeurs de x^{n-1}, x^{n-2}, x^{n-3}, &c. considérées comme autant d'inconnues au premier degré, & on les substituera dans la dernière.

Cette méthode est générale. Elle peut être simplifiée dans beaucoup de cas que nous ne nous arrêterons pas à détailler. Nous nous contenterons de remarquer que dans les multiplications successives par A' & A, $A'x + B'$ & $Ax + B$, &c. on peut se dispenser de multiplier le premier, les deux premiers, &c. termes des deux équations proposées, & en général autant de premiers termes qu'il entre de termes dans le multiplicateur, parce que le produit qu'ils donneront, s'anéantira par la soustraction.

169. Si l'on détermine les valeurs des différentes puissances de x d'après la règle que nous avons donnée pour les équations du premier degré à plusieurs inconnues, l'équation finale en y ne montera jamais à un degré plus haut que mn, en supposant que le plus haut exposant de x, ainsi que celui de y, soit m dans l'une des équations & n dans l'autre. Mais si les exposans de x & de y sont inégaux dans chaque équation, ensorte que ceux de x dans la première & dans la seconde étant toujours m & n, ceux de y soient $m + p$ & $n + q$, l'équation finale en y ne passera jamais le degré $mn + mq + np$. Voyez pour la démonstration les *Mém. de l'Acad. des Sciences*, *année*

1764. Voyez aussi les *Mém. de l'Acad. de Berlin*, *année* 1748, & l'*Analyse des lignes courbes* de Cramer.

Des équations à plus de deux inconnues, lorsqu'elles passent le premier degré.

170. Lorsqu'on a plus de deux équations & plus de deux inconnues, trois, par exemple, on peut s'y prendre de la même manière, en éliminant d'abord une des inconnues par le moyen de la première & de la seconde équation, traitées selon la méthode précédente; & en éliminant encore la même inconnue par le moyen de la première & de la troisième ou de la seconde & de la troisième. On aura par ce moyen deux équations qui ne renfermeront plus que deux inconnues que l'on traitera encore selon la méthode précédente.

Mais nous ne devons pas dissimuler que cette méthode qui conduit sûrement, lorsqu'on n'a que deux équations & deux inconnues, tombe néanmoins dans l'inconvénient de conduire à des équations plus élevées qu'il ne faut, lorsque le nombre des équations proposées est plus grand que 2.

Le moyen d'éviter cet inconvénient, est d'éliminer en combinant les équations, non pas deux à deux, mais trois à trois, lorsqu'il y en a trois; quatre à quatre, lorsqu'il y en a quatre, &c. Mais cette manière de les combiner exige encore un choix particulier, dont le détail nous méneroit trop loin. On le trouvera dans les *Mém. de l'Acad. des Sciences pour l'année* 1764. On y trouvera aussi plusieurs recherches sur le degré où doit monter l'équation finale résultante de l'élimination de plusieurs inconnues. Au reste, quoique ces méthodes auxquelles nous renvoyons, abaissent considérablement le degré auquel conduiroient celles qu'on a eues jusqu'ici, & autant qu'il est possible

possible en n'éliminant qu'une inconnue à la fois, il y a lieu de croire cependant, qu'il peut être encore diminué; mais probablement on n'y parviendra que quand on aura trouvé une méthode pour éliminer à la fois toutes les inconnues hors une, ce que je ne sache pas qu'on puisse encore pratiquer généralement sur d'autres équations que sur celles du premier degré.

Des Équations à deux termes.

171. On appelle *Équations à deux termes*, celles dans lesquelles il n'entre qu'une seule puissance de l'inconnue, parce qu'elles peuvent toujours être réduites à deux termes. Par exemple, l'équation $ax^5 + bx^5 = a^4b^2 - a^3b^3$ est une équation à deux termes, parce qu'en la mettant sous cette forme $(a+b)x^5 = a^4b^2 - a^3b^3$, on voit que a & b étant des quantités connues, on pourra toujours réduire $a+b$ à une seule quantité, & $a^4b^2 - a^3b^3$ pareillement à une seule quantité, ensorte que cette équation peut être représentée par cette autre $px^5 = q$. Ces équations sont très-faciles à résoudre; car il est évident qu'après avoir dégagé la puissance de l'inconnue, par les mêmes règles que dans les autres équations, il ne reste plus qu'à tirer la racine du degré marqué par l'exposant de l'inconnue. Par exemple, l'équation $px^5 = q$, deviendroit $x^5 = \frac{q}{p}$, & tirant la racine cinquième $x = \sqrt[5]{\frac{q}{p}}$.

172. Lorſque l'expoſant eſt impair, il n'y a jamais qu'une ſeule valeur réelle. Par exemple, ſi l'on avoit cette équation $x^5 = 1024$, on auroit $x = \sqrt[5]{1024} = 4$; Or il eſt évident qu'il n'y a qu'un ſeul nombre réel qui, élevé à la cinquième puiſſance, puiſſe produire 1024.

Si le ſecond membre de l'équation avoit le ſigne —, la valeur de x auroit le ſigne —; parce que — combiné par multiplication, avec —, un nombre impair de fois, donne —; mais lorſque l'expoſant eſt pair, l'inconnue a deux valeurs, l'une poſitive, l'autre négative, & qui peuvent être ou toutes deux réelles, ou toutes deux imaginaires. Ce dernier cas aura lieu ſi le ſecond membre a le ſigne —. Si l'on avoit l'équation $x^4 = 625$, on en concluroit $x = \sqrt[4]{625} = 5$; mais puiſque — multiplié par —, un nombre pair de fois, donne la même choſe que + multiplié par +, — 5 peut ſatisfaire auſſi bien que + 5; ainſi il faut écrire $x = \pm \sqrt[4]{625} = \pm 5$ comme dans les équations du ſecond degré. Si, au contraire, on avoit eu $x^4 = -625$; on auroit conclu $x = \pm \sqrt[4]{-625}$; mais ces deux valeurs ſont imaginaires, parce qu'il n'y a aucun nombre poſitif ou négatif qui multiplié par lui-même un nombre pair de fois, puiſſe produire une quantité

négative. Appliquons ces équations à une question. Supposons qu'on demande de *trouver deux moyennes proportionnelles entre* 5 & 625. En nommant x & y ces inconnues, on aura ÷ 5 : x : y : 625, qui donne ces deux proportions 5 : x :: x : y
& x : y :: y : 625.
D'où l'on déduit ces deux équations, en multipliant les extrêmes & les moyens, $5y = x^2$, & $625x = y^2$. La première donne $y = \frac{x^2}{5}$; substituant dans la seconde, on a $625x = \frac{x^4}{25}$; divisant par x & multipliant par 25, on a $x^3 = 15625$, & enfin $x = \sqrt[3]{15625} = 25$; donc $y = \frac{x^2}{5} = \frac{625}{5} = 125$.

Des Équations qui peuvent se résoudre à la manière de celles du second degré.

173. Ces équations ne doivent renfermer que deux puissances différentes de x, mais dont l'une ait un exposant double de celui de l'autre. Par exemple, $x^4 + 5x^2 = 8$, $x^6 + 5x^3 = 8$, sont dans ce cas. Ces équations se résolvent comme celles du second degré : après avoir rendu la plus haute puissance positive, si elle ne l'est pas, & après avoir dégagé cette même puissance, des quantités qui la multiplient ou la divisent, on prend la moitié de ce qui multiplie la puissance inférieure de l'inconnue, & on ajoute à chaque membre le quarré de cette

moitié, ce qui rend le premier membre un quarré parfait. Alors on tire la racine quarrée de chaque membre, en donnant à celle du second, le double signe $\pm$. L'équation est réduite à une équation à deux termes.

Par exemple, si l'on demandoit de *trouver deux nombres dont la somme des cubes fût* 35, *& dont le produit fût* 6 : on auroit ces deux équations $x^3 + y^3 = 35$ & $xy = 6$. Cette dernière donneroit $y = \frac{6}{x}$, valeur qui substituée dans la première, donne $x^3 + \frac{216}{x^3} = 35$; chassant le dénominateur, & transposant, on a $x^6 - 35x^3 = -216$. Je prends donc la moitié de 35 qui est $\frac{35}{2}$; j'en ajoute le quarré à chaque membre, & j'ai $x^6 - 35x^3 + (\frac{35}{2})^2 = (\frac{35}{2})^2 - 216$; tirant la racine quarrée, $x^3 - \frac{35}{2} = \pm \sqrt{[(\frac{35}{2})^2 - 216]}$; transposant, $x^3 = \frac{35}{2} \pm \sqrt{[(\frac{35}{2})^2 - 216]}$ & enfin tirant la racine cubique, $x = \sqrt[3]{\left[\frac{35}{2} \pm \sqrt{[(\frac{35}{2})^2 - 216]}\right]}$; or $(\frac{35}{2})^2 = \frac{1225}{4}$; & $(\frac{35}{2})^2 - 216 = \frac{1225-864}{4} = \frac{361}{4}$; donc $\sqrt{[(\frac{35}{2})^2 - 216]} = \sqrt{(\frac{361}{4})} = \frac{19}{2}$. Donc $x = \sqrt[3]{(\frac{35}{2} \pm \frac{19}{2})}$ qui donne ces deux valeurs $x = \sqrt[3]{\left(\frac{35+19}{2}\right)} = \sqrt[3]{\frac{54}{2}} = \sqrt[3]{27} = 3$, & $x = \sqrt[3]{(\frac{35-19}{2})} = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} = \sqrt[3]{8} = 2$; & puisqu'on a trouvé $y = \frac{6}{x}$, on aura $y = 2$ & $y = 3$.

Lorsque le plus haut exposant est 4 ou un multiple de 4, il peut y avoir jusqu'à quatre racines réelles.

De la Composition des Équations.

174. Nous venons de voir que les Équations à deux termes ne donnoient, pour l'inconnue, qu'une seule valeur réelle lorsqu'elles sont de degré impair, & deux lorsqu'elles sont de degré pair : elles en donnent, outre cela, plusieurs autres qui sont imaginaires, mais qui ne sont pas moins utiles, ainsi que nous le verrons lors de la résolution des équations, & ailleurs. En général *une équation quelconque donne toujours autant de valeurs pour l'inconnue, qu'il y a d'unités dans le plus haut exposant de cette équation.* De ces valeurs, qu'on nomme aussi *racines* de l'équation, les unes peuvent être positives, les autres négatives ; les unes réelles, les autres imaginaires.

175. Pour rendre toutes ces vérités sensibles, il faut observer que lorsque dans une équation on a fait passer tous les termes dans un seul membre, & que l'on a ordonné toutes les puissances de x ou de l'inconnue, on peut toujours considérer ce membre comme le résultat de la multiplication de plusieurs facteurs binomes simples qui auroient tous pour terme commun x.

Par exemple, lorsque l'équation $x^3 + 7x = 8x^2 + 9$ a été mise sous la forme suivante, par la transposition de ses termes $x^3 - 8x^2 + 7x - 9 = 0$, on conçoit que $x^3 - 8x^2 + 7x - 9$, peut très-bien résulter de la multiplication de trois facteurs binomes simples $x - a$, $x - b$, $x - c$,

En effet, si l'on multiplie ces trois facteurs, on aura...

$$\begin{array}{l} x^3 - ax^2 + abx - abc = 0 \\ \quad - bx^2 + acx \\ \quad - cx^2 + bcx \end{array}$$

Or pour que ces deux équations soient les mêmes, il ne s'agit que de trouver pour a, b, c, des valeurs telles que $a + b + c = 8$, $ab + ac + bc = 7$, & $abc = 9$.

Pour trouver chacune de ces quantités, a, par exemple, il faut, après avoir multiplié la première équation par a^2, & la seconde par a, ce qui donnera $a^3 + a^2b + a^2c = 8a^2$, $a^2b + a^2c + abc = 7a$, & $abc = 9$, il faut, dis-je, retrancher la seconde de la première, & y ajouter la troisième; ce qui donne $a^3 = 8a^2 - 7a + 9$, ou, en transposant $a^3 - 8a^2 + 7a - 9 = 0$.

On trouvera de la même manière, que l'équation qui donneroit b, est $b^3 - 8b^2 + 7b - 9 = 0$, & que celle qui donneroit c, est $c^3 - 8c^2 + 7c - 9 = 0$. Ce qui nous fournit les propositions suivantes.

176. 1°. Puisque l'équation qui doit donner a, est la même que celle qui doit donner b, & la même que celle qui doit donner c; & que d'ailleurs il est facile de voir que les valeurs de a, b, c ne peuvent être égales, il faut donc, que l'une quelconque de ces trois équations, puisse donner les valeurs de a, de b & de c; donc chacune de ces équations doit avoir trois racines, dont l'une sera la valeur de a; la seconde, la valeur de b; & la troisième, la valeur de c.

2°. Chacune de ces équations est la même que l'équation même proposée $a^3 - 8x^2 + 7x - 9 = 0$, à la seule différence près, que a, ou b, ou c, est changé en x.

Donc celle-ci doit avoir trois racines, & ces trois racines doivent être les trois valeurs de a, b, c.

Donc les quantités qu'il faut mettre pour a, b, c dans $x - a$, $x - b$, $x - c$, pour produire l'équation $x^3 - 8x^2 + 7x - 9 = 0$, par la multiplication de ces facteurs simples, sont les racines mêmes de cette équation.

177. Si les coëfficiens des différentes puissances de x, au lieu d'être 8, 7, &c. étoient d'autres nombres; & si l'équation, au lieu d'être du troisième degré, étoit du quatrième, du cinquième, &c., les conséquences que nous venons de tirer, seroient encore de même nature. Ainsi, si l'on avoit en général $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$, p, q, r, s étant des nombres connus; on pourroit, de même, considérer cette équation, comme formée du produit de quatre facteurs simples $x - a$, $x - b$, $x - c$, $x - d$. En effet ces quatre facteurs étant multipliés, donneroient. . . . . .

$$\begin{aligned} x^4 - ax^3 &+ abx^2 - abcx + abcd = 0. \\ - bx^3 &+ acx^2 - abdx \\ - cx^3 &+ adx^2 - acdx \\ - dx^3 &+ bcx^2 - bcdx \\ &+ bdx^2 \\ &+ cdx^2 \end{aligned}$$

Or pour que cette quantité soit la même que $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$, il faut que a, b, c, d soient tels que l'on ait $a + b + c + d = p$, $ab + ac + ad + bc + bd + cd = q$, $abc + abd + acd + bcd = r$, $abcd = s$.

Si l'on multiplie la première de ces équations par a^3, la seconde par a^2, la troisième par a, & qu'on retranche la seconde & la quatrième, de la première & de la troisième

réunies, on aura $a^4 = pa^3 - qa^2 + ra - s$, ou $a^4 - pa^3 + qa^2 - ra + s = 0$, on trouveroit de même que l'équation en b, eſt $b^4 - pb^3 + qb^2 - rb + s = 0$; que l'équation en c eſt $c^4 - pc^3 + qc^2 - rc + s = 0$; & que l'équation en d eſt $d^4 - pd^3 + qd^2 - rd + s = 0$. Ainſi l'équation qui donnera a, doit donc auſſi donner b, c & d; elle doit donc avoir quatre racines qui ſeront les valeurs des quatre quantités a, b, c, d. Et comme chacune de ces équations eſt la même que l'équation $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$, les quantités a, b, c, d qu'il faut prendre pour produire cette dernière par la multiplication de quatre facteurs ſimples $x - a$, $x - b$, $x - c$, $x - d$, ſont donc les racines mêmes de cette équation.

178. Donc en général, 1°. *une équation de degré quelconque peut toujours être conſidérée comme formée du produit d'autant de facteurs binomes ſimples, qui ont tous pour terme commun la lettre qui repréſente l'inconnue, qu'il y a d'unités dans le plus haut expoſant de l'inconnue.* 2°. *Les ſeconds termes de ces binomes, ſont les racines de cette équation, chacune étant priſe avec un ſigne contraire.*

179. Si l'équation, au lieu d'avoir ſes termes alternativement poſitifs & négatifs comme nous l'avons ſuppoſé ci-deſſus, dans l'équation $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$, avoit toute autre ſucceſſion de ſignes, par exemple, ſi elle étoit $x^4 + px^3 - qx^2 - rx + s = 0$, on n'en démontreroit pas moins, & de la même manière, qu'elle peut toujours être repréſentée par $(x - a) \times (x - b) \times (x - c) \times (x - d)$; a, b, c, d étant les racines de cette dernière équation.

180. Puiſque a, b, c, d, &c. ſont les racines de l'équation,

il ſuit des équations $a + b + c + d = p$, $ab + ac + ad + bc + bd + cd = q$, $abc + abd + acd + bcd = r$, $abcd = s$, 1°. que dans l'équation $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$; & en général dans toute équation, *le coëfficient* — p *du ſecond terme, pris avec un ſigne contraire, c'eſt-à-dire,* + p, *eſt égal à la ſomme de toutes les racines.*

2°. Que *le coëfficient* q *du troiſième terme eſt égal à la ſomme des produits de ces racines multipliées deux à deux.*

3°. Que *celui du quatrième, pris avec un ſigne contraire, eſt égal à la ſomme des racines multipliées trois à trois,* & ainſi de ſuite, & qu'*enfin le dernier terme, eſt le produit de toutes les racines.*

Cela eſt général, quels que ſoient les différens ſignes des termes de l'équation, prenant toujours avec un ſigne contraire, le coëfficient da chaque terme de numéro pair.

181. D'où il ſuit, que *dans une équation qui n'a pas de ſecond terme, il y a ſûrement des racines poſitives & des racines négatives, & la ſomme des unes eſt égale à la ſomme des autres.*

Ainſi dans l'équation $x^3 + 2x^2 - 23x - 60 = 0$, la ſomme des trois racines eſt -2; la ſomme de leurs produits, multipliés deux à deux, eſt -23; la ſomme de leurs produits trois à trois, ou le produit des trois racines eſt $+60$. En effet les trois racines ſont $+5, -4, -3$, ainſi qu'on peut le voir en mettant chacun de ces nombres, au lieu de x, dans l'équation; car chacun réduit le premier membre à zéro. Or il eſt évident que la ſomme de ces trois nombres, c'eſt-à-dire, $+5 - 4 - 3$ eſt -2; que la ſomme de leurs produits deux à deux, ou $-20 - 15$

$+ 12$, eſt $- 23$; & que le produit des trois, eſt $5 \times - 4 \times - 3$, c'eſt-à-dire, $+ 60$.

Pareillement dans l'équation $x^3 - 19x + 30 = 0$, comme le ſecond terme manque, je conclus qu'il y a des racines poſitives & des racines négatives, & que la ſomme des unes eſt égale à la ſomme des autres; en effet les trois racines ſont $+ 2$, $+ 3$, & $- 5$.

En conſidérant une équation, comme formée du produit de pluſieurs facteurs binomes ſimples, on ſe rend aiſément raiſon, comment il peut ſe faire qu'il y ait pluſieurs nombres différens qui ſatisfaſſent à une équation. Par exemple, ſi l'on propoſoit cette queſtion: *Trouver un nombre tel que ſi on en retranche 5, & qu'à ce même nombre on ajoute ſucceſſivement les nombres 4 & 3, les deux ſommes multipliées entre elles, & par le reſte, faſſent zéro*: on aura, en nommant x ce nombre, $x - 5$ pour le reſte, & $x + 4$, $x + 3$ pour les deux ſommes; il faut donc que $(x + 4) \times (x + 3) \times (x - 5) = 0$, c'eſt-à-dire, que $x^3 + 2x^2 - 23x - 60 = 0$; or on voit évidemment que ce produit ou ſon égal $(x + 4) \times (x + 3) \times (x - 5)$ peut devenir zéro dans trois cas différens; ſavoir, ſi $x = - 4$, ſi $x = - 3$, & ſi $x = 5$: en effet, dans le premier cas, il devient $0 \times (- 4 + 3) \times (- 4 - 5)$ ou 0; dans le ſecond, il devient $(- 3 + 4) \times (0) \times (- 3 - 5)$ ou 0; & dans le troiſième, $(5 + 4) \times (5 + 3) \times (0)$ ou 0. Or quand on propoſe une équation telle que $x^3 + 2x^2 - 23x - 60 = 0$, rien ne détermine à prendre $- 4$ plutôt que $- 3$, ou plutôt que $+ 5$, puiſque chacun réduiſant également le premier membre, à zéro, ſatisfait également à l'équation.

182. Nous placerons encore ici une autre remarque qui peut avoir ſon utilité. Les équations $a + b + c + d = p$,

$ab + ac + ad + bc + bd + cd = q$, $abc + abd + acd + bcd = r$, $abcd = s$, nous ont, toutes, conduit à la même équation, soit pour avoir a, soit pour avoir b, soit, &c. La raison en est que a, b, c, d, étant toutes disposées de la même manière dans chaque équation, il n'y a pas de raison pour que l'une soit déterminée par aucune opération différente de celles qui détermineroient l'autre; donc en général, si dans la recherche de plusieurs quantités inconnues, on est obligé d'employer pour chacune, les mêmes raisonnemens, les mêmes opérations, & les mêmes quantités connues, toutes ces quantités seront nécessairement racines d'une même équation; & par conséquent cette question conduira à une équation composée.

183. Puisqu'on peut considérer une équation comme formée du produit de plusieurs facteurs simples, on peut aussi la considérer comme formée du produit de plusieurs facteurs composés; ainsi une équation du troisième degré peut être considérée comme formée du produit d'un facteur du second degré, tel que $x^2 + ax + b$, par un facteur du premier, tel que $x + c$: en effet, $x^2 + ax + b$ peut toujours représenter le produit des deux autres facteurs simples.

De même, une équation du cinquième degré peut être considérée comme formée, ou du produit de cinq facteurs simples, ou de deux facteurs du second degré & d'un facteur du premier, ou d'un facteur du troisième & d'un facteur du second, ou enfin d'un facteur du quatrième & d'un facteur du premier.

184. Nous avons vu qu'une équation du second degré pouvoit avoir des racines imaginaires; puis donc qu'une équation de degré quelconque peut avoir été formée par le

concours d'un ou de plusieurs facteurs du second degré, elle peut aussi avoir des racines imaginaires. Mais il peut y en avoir de formes bien différentes de celles du second degré.

185. Quand on considère une équation comme formée du produit de plusieurs facteurs simples, on voit qu'elle ne peut avoir que m diviseurs du premier degré, m marquant le degré.

186. En considérant une équation comme formée du produit de facteurs du second degré, le nombre des diviseurs du second degré qu'elle peut avoir, est exprimé par $m.\frac{m-1}{2}$, m marquant le degré de cette équation. En effet chaque facteur du second degré étant le produit de deux facteurs simples, dont chacun peut diviser l'équation, doit aussi pouvoir diviser l'équation. Or nous avons vû (148) qu'il y a $m.\frac{m-1}{2}$ manières différentes de multiplier, deux à deux, un nombre m de quantités, il y aura donc $m.\frac{m-1}{2}$ différens diviseurs du second degré.

Par exemple, l'équation . . . .

$$\begin{array}{llll} x^4 - ax^3 & + abx^2 & - abcx & + abcd = 0 \\ - bx^3 & + acx^2 & - abdx & \\ - cx^3 & + adx^2 & - acdx & \\ - dx^3 & + bcx^2 & - bcdx & \\ & + bdx^2 & & \\ & + cdx^2 & & \end{array}$$

formée du produit de $(x-a) \times (x-b) \times (x-c) \times (x-d)$, peut être considérée comme formée du produit de deux facteurs du second degré, en ces six manières . . . .

en multipliant $(x-a)\times(x-b)$ par $(x-c)\times(x-d)$

$$(x-a)\times(x-c)\,..\,(x-b)\times(x-d)$$
$$(x-a)\times(x-d)\,..\,(x-b)\times(x-c)$$
$$(x-b)\times(x-c)\,..\,(x-a)\times(x-d)$$
$$(x-b)\times(x-d)\,..\,(x-a)\times(x-c)$$
$$(x-c)\times(x-d)\,..\,(x-a)\times(x-b)$$

Ainſi une équation du quatrième degré peut avoir ſix différens diviſeurs du ſecond, & en général une équation du degré m, peut avoir $m\,.\,\frac{m-1}{2}$ différens diviſeurs du ſecond degré.

Concluons donc de-là, que ſi l'on demande quelles devroient être les valeurs de g & de h, pour que x^2+gx+h fût diviſeur d'une équation propoſée du degré m, on peut être aſſuré que g & h ne peuvent être déterminés chacun que par une équation du degré $m\,.\,\frac{m-1}{2}$. Car x^2+gx+h eſt auſſi propre à repréſenter l'un des diviſeurs du ſecond degré que tout autre; donc h doit être ſuſceptible de $m\,.\,\frac{m-1}{2}$ valeurs; il en eſt de même de g qui eſt la ſomme de deux des racines de l'équation. Chacune de ces quantités doit donc être donnée par une équation du degré $m\,.\,\frac{m-1}{2}$.

On prouvera de même qu'en conſidérant une équation comme formée du produit de facteurs du troiſième degré, chaque facteur du troiſième degré eſt ſuſceptible de $m\,.\,\frac{m-1}{2}\,.\,\frac{m-2}{3}$ valeurs différentes; enſorte que ſi x^3+gx^2+hx+k repréſente l'un de ces facteurs, k ne pourra être déterminé que par une équation du degré $m\,.\,\frac{m-1}{2}\,.\,\frac{m-2}{3}$. On voit

assez les conséquences analogues qu'il y a à tirer pour les facteurs du quatrième, cinquième, &c. degré.

187. Concluons de tout ce qui précède que lorsqu'on a trouvé une racine d'une équation, on peut, pour avoir les autres, diviser l'équation par x — cette racine, c'est-à-dire, par $x - a$ en représentant cette racine par a; la division se fera exactement, & donnera pour quotient une quantité où x sera moins élevé d'un degré; cette quantité étant égalée à zéro sera l'équation qu'il faut résoudre pour avoir les autres racines. On voit de même que si l'on connoît deux racines, que je représente par a & b, il n'y a qu'à diviser l'équation par $(x - a) \times (x - b)$ & ainsi de suite.

Des Transformations qu'on peut faire subir aux Équations.

188. On peut faire subir aux équations différentes transformations dont il est à propos que nous parlions avant de passer à la résolution de ces mêmes équations.

189. *Si l'on change dans une équation les signes des termes qui renferment des puissances impaires, les racines positives de cette équation seront changées en négatives & les négatives en positives :* en effet, pour changer les signes des racines de l'équation, il suffit de mettre $-x$ au lieu de $+x$; or cette substitution ne change point les signes des termes qui renferment des puissances paires de x, & change au contraire, les signes de ceux qui renferment des puissances impaires.

190. *Pour changer une équation dans laquelle il y a des dénominateurs, en une autre dans laquelle il n'y en ait plus, & cela sans donner un coëfficient au premier terme*, il faut substituer au lieu de l'inconnue, une nouvelle inconnue divisée par le produit de tous les dénominateurs; & multiplier ensuite

toute l'équation par le dénominateur qu'aura alors le premier terme.

Par exemple, si j'ai $x^3 + \frac{ax^2}{m} + \frac{cx}{n} + \frac{d}{p} = 0$, je ferai $x = \frac{y}{mnp}$; & substituant dans l'équation, j'aurai $\frac{y^3}{m^3n^3p^3} + \frac{ay^2}{m^3n^2p^2} + \frac{cy}{mn^2p} + \frac{d}{p} = 0$; multipliant par $m^3n^3p^3$, j'ai $y^3 + \frac{am^3n^3p^3y^2}{m^3n^2p^2} + \frac{m^3n^3p^3c}{mn^2p}y + \frac{m^3n^3p^3d}{p} = 0$; & faisant les divisions indiquées, $y^3 + anpy^2 + m^2np^2cy + m^3n^3p^2d = 0$.

191. Si m, n & p étoient égaux, il suffiroit de faire $x = \frac{y}{m}$. D'où il suit que pour changer une équation dont tous les coëfficiens sont des nombres entiers, mais dont le premier terme a un coëfficient, en une autre dans laquelle celui-ci n'en ait plus, & où les autres aient néanmoins des entiers pour coëfficiens, il faut faire $x = \frac{y}{m}$, m marquant ce coëfficient du premier terme. En effet, si j'ai l'équation $mx^3 + ax^2 + bx + c = 0$; en divisant par m, j'aurai $x^3 + \frac{a}{m}x^2 + \frac{b}{m}x + \frac{c}{m} = 0$, où tous les dénominateurs sont égaux.

192. *Pour faire disparoître le second terme d'une équation*, il faut substituer, au lieu de l'inconnue, une nouvelle inconnue augmentée du coëfficient du second terme de l'équation, pris avec un signe contraire, & divisé par l'exposant du premier.

En effet, représentons, en général, cette équation par $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \ldots k = 0$. Si on suppose

$x = y + s$, on aura deux équations & trois inconnues ; on ſera donc maître de déterminer l'une d'entre elles, par telle condition que l'on voudra.

Or ſi l'on ſubſtitue, dans chaque terme, au lieu de la puiſſance de x qu'il renferme, une puiſſance ſemblable de $y + s$, on aura (149) une ſuite de termes telle que celle-ci.....

$$\begin{array}{l} y^m + msy^{m-1} + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot s^2 y^{m-2} \text{ \&c.} \ldots + k = 0. \\ \quad + ay^{m-1} + (m-1) \cdot asy^{m-2} \text{ \&c.} \\ \qquad\quad + \qquad\qquad by^{m-2} \text{ \&c.} \end{array}$$

Si donc nous regardons y comme l'inconnue, il eſt évident que cette équation ſera ſans ſecond terme, ſi s eſt telle que l'on ait $ms + a = 0$, c'eſt-à-dire, ſi l'on prend $s = \frac{-a}{m}$, qui eſt la valeur que cette équation donne pour s. Or nous venons de voir que nous pouvions prendre pour l'une des trois inconnues, & par conſéquent, pour s, telle valeur que nous jugerions à propos ; puis donc que $\frac{-a}{m}$ eſt la valeur qu'il faut lui donner pour que l'équation en y ſoit ſans ſecond terme, il s'enſuit que pour changer l'équation propoſée $x^m + ax^{m-1} +$, &c. en une autre qui n'ait point de ſecond terme, il faut faire $x = y - \frac{a}{m}$, ce qui démontre la règle que nous venons de donner.

Par exemple, pour faire diſparoître le ſecond terme de l'équation $x^3 + 6x^2 - 3x + 4 = 0$; je fais $x = y - \frac{6}{3}$, c'eſt-à-dire, $x = y - 2$. En ſubſtituant j'aurai ....

$$\begin{array}{rrrr} y^3 - 6y^2 & + 12y & - 8 & = 0 \\ + 6y^2 & - 24y & + 24 & \\ & - 3y & + 6 & \\ & & + 4 & \end{array}$$

qui

qui se réduit à $y^3 - 15y + 26 = 0$, équation qui n'a point le second terme y^2.

De la Résolution des Équations composées.

193. Nous supposerons, dans tout ce que nous allons dire, qu'on ait fait passer dans un seul membre, tous les termes de l'équation.

Nous avons déjà dit (54) ce qu'on doit entendre par ces mots *résoudre une équation*; mais il faut ici fixer plus particulièrement ce que l'on entend par *résolution générale d'une équation.*

Résoudre généralement une équation d'un degré quelconque, telle que $x^m + px^{m-1} + qx^{m-2} + \dots k = 0$; c'est trouver pour l'inconnue autant de valeurs qu'il y a d'unités dans le plus haut exposant de cette inconnue, & dont chacune soit exprimée par les lettres p, q, &c. k combinées entre elles de quelque manière que ce soit, telle cependant que chacune de ces valeurs substituée au lieu de x dans l'équation, réduise le premier membre à zéro, indépendamment de toute valeur particulière de p, q, &c.

Par exemple, la règle que nous avons donnée (100) pour les équations du second degré, résout généralement ces équations. En effet, $x^2 + px + q = 0$, peut représenter toute équation du second degré, parce que par p & q on peut entendre toutes sortes de nombres, positifs ou négatifs; or cette équation résolue suivant cette même règle, donne ces deux valeurs de x, $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$. Que l'on substitue maintenant l'une de ces deux valeurs, celle-ci, par exemple, $-\frac{1}{2}p + \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$, au lieu de x dans le premier membre de l'équation $x^2 + px + q = 0$; on aura

$(-\frac{1}{2}p+\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)})^2+p(-\frac{1}{2}p+\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)})+q$, qui revient à $\frac{1}{4}p^2-p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}+\frac{1}{4}p^2-q-\frac{1}{2}p^2+p\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}+q$, qui, toute réduction faite, se réduit à zéro. Il en feroit de même, si l'on substituoit $-\frac{1}{2}p-\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}$.

Cette expression générale des différentes valeurs de x dans une équation, est d'autant plus difficile à trouver, que le degré de l'équation est plus élevé, & il est aisé de sentir que cela doit être, si l'on fait les réflexions suivantes.

Quelle que puisse être la forme des valeurs de l'inconnue dans une équation de degré quelconque, il est certain que la résolution générale d'une équation d'un degré déterminé doit renfermer la résolution des équations générales de tous les degrés inférieurs.

En effet, la résolution générale d'une équation du cinquième degré, par exemple, telle que $x^5+px^4+qx^3+rx^2+sx+t=0$, doit donner pour x cinq valeurs, dont chacune doit nécessairement renfermer toutes les lettres p, q, r, s, t. Or lorsque t est zéro, cette équation se réduit à $x^5+px^4+qx^3+rx^2+sx=0$, qui étant le produit de ces deux facteurs $x^4+px^3+qx^2+rx+s$, & x, donne 1°. $x=0$; 2°, $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$. Donc des cinq valeurs de x que donnera la résolution générale, l'une doit alors se réduire à zéro, & les quatre autres doivent être les racines de l'équation $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$. Or celle-ci n'étant que du quatrième degré, ses racines ne peuvent avoir que la forme de celle du quatrième degré; donc puisqu'elles sont en même temps comprises dans celles du cinquième degré, il faut que la résolution de celle-ci comprenne la résolution du quatrième. On prouvera de même que la résolution du quatrième doit comprendre celle du troisième, & ainsi de suite. Donc la résolution d'une équation

de degré quelconque, doit comprendre la résolution de tous les degrés inférieurs.

De-là on peut conclure que l'expression de l'une quelconque des racines, doit renfermer toutes les espèces de radicaux depuis son degré jusqu'au premier (*). En effet, il est facile de voir que dans quelque degré que ce soit, il doit y avoir des radicaux de ce degré, puisque, dans le cas particulier où tous les termes, excepté le premier & le dernier, manqueroient, l'expression des valeurs de x renfermeroit un pareil radical; car l'équation étant alors $x^m + k$, on auroit $x = \sqrt[m]{-k}$; donc puisque la forme générale des racines doit comprendre la forme de celles de tous les degrés inférieurs, elle doit renfermer tous les radicaux, depuis son degré, jusqu'au premier.

194. Après ces réflexions sur la forme des racines, voyons la méthode qu'on peut employer pour les trouver.

Celle que nous allons exposer, consiste à considérer l'équation qu'il s'agit de résoudre, comme le résultat de deux équations à deux inconnues. Nous avons vu ci-dessus (167), comment on parvenoit à réduire ces deux-ci à une seule, qui ne renferme plus qu'une inconnue. Il s'agit donc de les choisir telles que l'élimination produise une équation que l'on

(*) Lorsque l'exposant de l'équation est un nombre composé du produit de deux ou plusieurs autres, il peut arriver, selon la méthode qu'on emploiera pour résoudre, que l'expression générale des racines ne renferme pas explicitement les radicaux de ce degré; mais il n'y sont pas moins implicitement. Par exemple, dans le quatrième degré; au lieu des $\sqrt[4]{}$, on trouve, par certaines méthodes, des quantités telles que $\sqrt{(a + \sqrt{b})}$, mais on voit que celles-ci comprennent les premières.

puiffe fuppofer la même que l'équation propofée. Nous allons voir quelles elles doivent être pour cet effet.

Quoique cette méthode n'exige pas qu'on faffe difparoître le fecond terme de l'équation propofée, cependant les calculs étant plus fimples, lorfqu'il n'y a pas le fecond terme, nous fuppoferons qu'on a fait évanouir celui-ci, par la méthode donnée (192).

Ainfi nous fuppoferons que $x^m + p x^{m-2} + q x^{m-3} + r x^{m-4} +$ &c., $+ k = 0$, eft en général l'équation qu'il s'agit de réfoudre.

On prendra les deux équations .... $y^m - 1 = 0$.
& $a y^{m-1} + b y^{m-2} + c y^{m-3} + d y^{m-4} +$ &c.. $+ x = 0$, a, b, c, &c. étant des quantités inconnues que l'on déterminera comme il va être dit.

Par le moyen de ces deux dernières on éliminera y, ce qui conduira à une équation en x, qui fera du degré m, & n'aura point de fecond terme.

Les coëfficiens (*) des différentes puiffances de x, feront compofés de a, b, c, & leurs puiffances.

On égalera chaque coëfficient, au coëfficient de pareille puiffance de x dans l'équation propofée $x^m + p x^{m-2} +$ &c.; ce qui donnera autant d'équations pour déterminer a, b, c, &c. qu'il y a de ces quantités. Lorfque a, b, c, &c. auront été déterminés, on aura toutes les racines ou valeurs de x, en fubftituant dans l'équation $a y^{m-1} + b y^{m-2} + c y^{m-3} + d y^{m-4} +$ &c.... $+ x = 0$, ces valeurs de a, b, c, &c. & mettant

(*) Le mot *coëfficient* eft pris ici dans un fens plus étendu que par le paffé. Il fignifie en général la totalité des quantités foit numériques, foit littérales, qui multiplient l'une quelconque des puiffances de x. Ainfi dans $p x^{m-2}$, p eft le coëfficient de x^{m-2}.

successivement pour y, chacune des racines de l'équation $y^m - 1 = 0$ qui sont faciles à déterminer, comme nous le verrons par la suite.

Application au troisième degré.

195. Soit donc $x^3 + px + q = 0$, l'équation qu'il s'agit de résoudre.

Je prends $y^3 - 1 = 0$, & $ay^2 + by + x = 0$. Pour chasser y, je multiplie cette dernière par y, & mettant pour y^3, sa valeur 1 tirée de l'équation $y^3 - 1 = 0$, j'ai $by^2 + xy + a = 0$. Je multiplie, de même, celle-ci par y, & mettant encore pour y^3, sa valeur 1, j'ai $xy^2 + ay + b = 0$.

Ainsi, j'ai les trois équations

$$ay^2 + by + x = 0$$
$$by^2 + xy + a = 0$$
$$xy^2 + ay + b = 0$$

Par le moyen des deux premières, je prends la valeur de y^2 & celle de y, selon la méthode des équations du premier degré, à deux inconnues; j'ai $y^2 = \frac{xx - ab}{bb - ax}$ & $y = \frac{aa - bx}{bb - ax}$.

Je substitue ces valeurs dans la troisième équation. . . . . $xy^2 + ay + b = 0$; j'ai $\frac{x^3 - abx + a^3 - abx}{bb - ax} + b = 0$, ou, chassant le dénominateur & réduisant, $x^3 - 3abx + a^3 = 0$.
$\qquad + b^3$

Comparant cette équation avec $x^3 + px + q = 0$; il faut (*) pour qu'elles soient les mêmes, que $-3ab = p$,

(*) On pourroit peut-être demander s'il est nécessaire, pour que les deux équations deviennent les mêmes, de les égaler terme à terme; & s'il ne suffiroit pas d'écrire $x^3 + px + q = x^3 - 3abx + a^3 + b^3$? Voici la réponse.

Il est indispensable d'égaler

& $a^3 + b^3 = q$; ce font là les deux équations qui donneront a & b.

La première donne $b = -\frac{p}{3a}$; fubftituant dans la feconde, on a $a^3 - \frac{p^3}{27a^3} = q$, ou en multipliant par a^3 ; & tranfpofant, $a^6 - qa^3 = \frac{p^3}{27}$, équation qu'on peut (173) réfoudre comme une équation du fecond degré, & qui par conféquent deviendra $a^6 - qa^3 + \frac{1}{4}q^2 = \frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3$, puis $a^3 - \frac{1}{2}q = \pm\sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}$; tranfpofant, $a^3 = \frac{1}{2}q \pm \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}$, & enfin $a =$ (*) $\sqrt[3]{[\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}]}$.

Pour avoir b, je mets dans l'équation $a^3 + b^3 = q$, la valeur de a^3 que nous venons de trouver, & j'ai $\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)} + b^3 = q$, & par conféquent $b^3 = \frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}$; donc $b = \sqrt[3]{[\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}]}$.

Or l'équation $ay^2 + by + x = 0$, donne $x = -ay^2 - by$; on a donc $x = -y^2\sqrt[3]{[\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}]} - y\sqrt[3]{[\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}]}$, qui renferme les trois racines.

terme à terme ; parce que pour que les deux équations foient les mêmes il faut que les trois racines foient les mêmes dans chacune ; or cette condition exige que la fomme des racines foit la même ; ce qui a lieu. 2°. Que la fomme $-3ab$ des produits de ces racines deux à deux, dans l'une, foit la même que la fomme p des mêmes produits dans l'autre. 3°. Que le produit $a^3 + b^3$ des trois racines de l'une, foit le même que le produit q des trois racines de l'autre.

(*) Je ne donne ici qu'un feul figne au fecond radical, parce que je n'ai befoin que d'une valeur de a ; il importe peu laquelle : chacune fatisfait également comme nous le verrons ci-après.

Il ne s'agit donc plus que de connoître les valeurs de y. Or l'équation $y^3 - 1 = 0$, donne $y^3 = 1$, & par conséquent, en tirant la racine cubique, $y = 1$. Pour avoir les deux autres racines, je divise (151) $y^3 - 1$ par $y - 1$, & j'ai $y^2 + y + 1$, qui étant égale à zéro, donne l'équation qui renferme les deux autres racines. Cette équation $y^2 + y + 1 = 0$ étant résolue, donne $y = \frac{-1 \pm \sqrt{(-3)}}{2}$; les trois valeurs de y sont donc $y = 1$, $y = \frac{-1 + \sqrt{(-3)}}{2}$, $y = \frac{-1 - \sqrt{(-3)}}{2}$. Substituant successivement ces valeurs, dans $x = -y^2 \sqrt[3]{\left[\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}\right]}$, $-y\sqrt[3]{\left[\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}\right]}$, & faisant attention que $\left(\frac{-1 + \sqrt{(-3)}}{2}\right)^2$ & $\left(\frac{-1 - \sqrt{(-3)}}{2}\right)^2$ se réduisent, le premier à $\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$, & le second à $\frac{-1 + \sqrt{(-3)}}{2}$, on a ces trois valeurs de x,

$$x = -\sqrt[3]{\left[\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}\right]} - \sqrt[3]{\left[\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}\right]}.$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{(-3)}}{2}\sqrt[3]{\left[\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}\right]} + \frac{1 - \sqrt{(-3)}}{2}\sqrt[3]{\left[\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}\right]}.$$

$$x = \frac{1 - \sqrt{(-3)}}{2}\sqrt[3]{\left[\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}\right]} + \frac{1 + \sqrt{(-3)}}{2}\sqrt[3]{\left[\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}\right]}.$$

Si l'on suppose, dans l'équation $x^3 + px + q = 0$, que $q = 0$; l'équation se réduit alors à $x^3 + px = 0$, ou $(x^2 + p) \times x = 0$;

donc l'une des racines est $x = 0$, & les deux autres se trouvent en résolvant l'équation $x^2 + p = 0$, qui donne $x = + \sqrt{-p}$, & $x = - \sqrt{-p}$; c'est aussi ce que donne la formule générale des racines; car la première devient alors $x = - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{27}p^3}}$ $- \sqrt[3]{-\sqrt{\frac{1}{27}p^3}}$, c'est-à-dire, $x = - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{27}p^3}} = 0$; la 2e. devient $x = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{27}p^3}} + \frac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\sqrt{\frac{1}{27}p^3}}$ $= \frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{27}p^3}} + \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{27}p^3}}$ $= \sqrt{-3}\sqrt[6]{\frac{1}{27}p^3} = \sqrt{-3}\sqrt{\frac{1}{3}p} = \sqrt{-p}$. On verra de même que la troisième est $-\sqrt{-p}$.

196. Comme l'équation $a^6 - qa^3 = \frac{1}{27}p^3$, d'où nous avons déduit la valeur a, a six racines, on pourroit peut-être demander si chacune peut être également employée; & si dans le cas où elles seroient toutes également admissibles, il n'en résulteroit pas 18 valeurs différentes pour x, puisque chacune en donneroit trois.

Chacune des six valeurs de a est également bonne; mais l'une quelconque, donne pour x les mêmes valeurs que toute autre. En voici la preuve:

Faisons, pour simplifier le calcul . . . . $\sqrt[3]{[\frac{1}{2}q + (\sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3})]} = m$, & . . . . $\sqrt[3]{[\frac{1}{2}q - (\sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3})]} = n$; alors l'équation $a^3 = \frac{1}{2}q \pm (\sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3})$ trouvée ci-dessus, se changera en ces deux autres $a^3 = m^3$, & $a^3 = n^3$; la première donne $a = m$, & en divisant $a^3 - m^3$ par $a - m$, on aura $a^2 + ma + m^2$ qui étant égalé à zéro, donnera les deux autres valeurs de a, que l'on trouvera être $a = \frac{-m \pm m\sqrt{-3}}{2}$, ou $a = m\left(\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right)$;

ainsi les trois valeurs de a sont m, $m.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ & $m.\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$. On trouvera de même que l'équation $a^3=n^3$ donne ces trois autres $a=n$, $a=n.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $a=n.\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$. Or puisqu'on a $a^3+b^3=q$, on aura $m^3+b^3=q$ & $n^3+b^3=q$, & en mettant pour m^3 & n^3 leurs valeurs, $b^3=\frac{1}{2}q-\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)}$ & $b^3=\frac{1}{2}q+\sqrt{(\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3)}$, c'est-à-dire, $b^3=n^3$ & $b^3=m^3$; donc les valeurs de b sont telles que $ab=mn$, ensorte que les valeurs de a & b, qui doivent aller l'une avec l'autre, sont telles qu'il suit:

$$a=m \ldots\ldots\ldots\ldots b=n$$
$$a=m\left(\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}\right),\ b=n\left(\frac{-1\mp\sqrt{-3}}{2}\right)$$
$$a=n \ldots\ldots\ldots\ldots b=m$$
$$a=n\left(\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}\right)\ b=m\left(\frac{-1\mp\sqrt{-3}}{2}\right)$$

Substituez maintenant l'une quelconque de ces six combinaisons dans $x=-ay^2-by$, en mettant successivement par y ses trois valeurs, & vous aurez toujours ces trois racines $x=-m-n$ $x=\frac{1+\sqrt{-3}}{2}.m+\frac{1-\sqrt{-3}}{2}.n$, $x=\frac{1-\sqrt{-3}}{2}.m+\frac{1+\sqrt{-3}}{2}.n$

197. En considérant les trois valeurs de x que nous avons trouvées ci-dessus, on voit que tant que p sera positif, la quantité $\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3$ sera toujours positive, parce que $\frac{1}{4}q^2$ qui est le quarré de $\frac{1}{2}q$ sera toujours positif, quand même q seroit négatif. Cette même quantité sera encore positive, tant que $\frac{1}{4}q^2$ sera plus grand que $\frac{1}{27}p^3$, p étant négatif. Dans

ces deux cas, les deux dernières valeurs de x font imaginaires. Car les deux radicaux cubes étant alors des quantités réelles & inégales, leur produit par les quantités $\sqrt{-3}$ & $-\sqrt{-3}$ de signes contraires, ne se détruiront pas mutuellement; ainsi il restera de l'imaginaire dans chacune de ceux valeurs de x. Il n'y a donc alors que la première valeur de x, qui soit réelle.

198. Mais si p étant négatif, $\frac{1}{27}p^3$ se trouvoit plus grand que $\frac{1}{4}q^2$, alors $\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3$ seroit une quantité négative, & la quantité $\sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)}$ seroit imaginaire: néanmoins les trois valeurs de x sont alors réelles.

Pour s'en convaincre, il faut d'abord observer que $\sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)}$ qu'on a alors au lieu de $\sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)}$, est la même chose que $\sqrt{[(\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}q^2) \times -1]}$, ou que $\sqrt{[(\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}q^2)} \times \sqrt{-1}]$; ainsi, pour abréger, je suppose $\frac{1}{2}q = m$ & $\sqrt{(\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}q^2)} = n$, la quantité $\sqrt[3]{[\frac{1}{2}q + (\sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3})]}$ deviendra $\sqrt[3]{(m + n\sqrt{-1})}$; or ces quantités étant la même chose (133) que $(m + n\sqrt{-1}^{\frac{1}{3}})$ & $(m - n\sqrt{-1}^{\frac{1}{3}})$, si on les réduit en série, par la méthode donnée (151), on aura pour la première. . . . .

$$m^{\frac{1}{3}}(1 + \frac{1}{3}\frac{n}{m}\sqrt{-1} + \frac{1}{9}\frac{n^2}{m^2} - \frac{5}{81}\frac{n^3}{m^3}\sqrt{-1} - \frac{10}{243}\frac{n^4}{m^4} + \frac{110}{3645}\frac{n^5}{m^5}\sqrt{-1}\ \&c.)$$

& pour la seconde. . . . .

$$m^{\frac{1}{3}}(1 - \frac{1}{3}\frac{n}{m}\sqrt{-1} + \frac{1}{9}\frac{n^2}{m^2} + \frac{5}{81}\frac{n^3}{m^3}\sqrt{-1} - \frac{10}{243}\frac{n^4}{m^4} - \frac{110}{3645}\frac{n^5}{m^5}\sqrt{-1}\ \&c.);$$

or ces trois valeurs de x se changent alors en. . . . . . .

$$x = -\sqrt[3]{(m + n\sqrt{-1})} - \sqrt[3]{(m - n\sqrt{-1})}$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{(m + n\sqrt{-1})} + \frac{1 - \sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{(m - n\sqrt{-1})}$$

$$x = \frac{1 - \sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{(m + n\sqrt{-1})} + \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{(m - n\sqrt{-1})}.$$

Substituant, au lieu des deux radicaux cubes, les séries qui

en sont les valeurs, on aura, après avoir fait les multiplications par $\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ & $\frac{1-\sqrt{-3}}{2}$, qui se rencontrent dans les deux dernières valeurs de x, & après les réductions ordinaires, ayant d'ailleurs égard à ce que $\sqrt{-3} \times \sqrt{-1}$ donne $-\sqrt{3}$ (*), & que tout est multiplié par $m^{\frac{1}{3}}$, on aura, dis-je. . . . .

$$x = -m^{\frac{1}{3}}\left(2 + \frac{2}{9}\frac{n^2}{m^2} - \frac{20}{243}\frac{n^4}{m^4}, \&c.\right)$$

$$x = m^{\frac{1}{3}}\left(1 + \frac{1}{9}\frac{n^2}{m^2} - \frac{10}{243}\frac{n^4}{m^4}, \&c.\right) - m^{\frac{1}{3}}\sqrt{3}\left(\frac{1}{3}\frac{n}{m} - \frac{5}{81}\frac{n^3}{m^3} + \frac{110}{3645}\frac{n^5}{m^5}, \&c.\right)$$

$$x = m^{\frac{1}{3}}\left(1 + \frac{1}{9}\frac{n^2}{m^2} - \frac{10}{243}\frac{n^4}{m^4}, \&c.\right) + m^{\frac{1}{3}}\sqrt{3}\left(\frac{1}{3}\frac{n}{m} - \frac{5}{81}\frac{n^3}{m^3} + \frac{110}{3645}\frac{n^5}{m^5}, \&c.\right)$$

Quantités dans lesquelles il n'y a plus d'imaginaires. On n'a pu trouver, jusqu'à présent, que cette manière de donner, dans ce cas, une valeur algébrique réelle aux trois racines; ainsi on ne peut les avoir alors sous une forme réelle, que par approximation. Ce cas singulier a fort exercé les Algébristes, & on lui a donné le nom de *cas irréductible*.

Donnons maintenant quelques exemples.

Supposons qu'on demande les racines de l'équation. . . . $y^3 + 6y^2 - 3y + 4 = 0$; je commence par faire disparoître (192) son second terme, en faisant $y = x - 2$; cela réduit l'équation à $x^3 - 15x + 26 = 0$; or nous avons représenté toute équation du troisième degré, sans second terme, par $x^3 + px + q = 0$; nous avons donc $p = -15$, $q = 26$; donc $\frac{1}{2}q = 13$, $\frac{1}{4}q^2 = 169$; $\frac{1}{3}p = -5$, & $\frac{1}{27}p^3 = -125$; donc $\sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)} = \sqrt{(169 - 125)} = \sqrt{44}$; les trois valeurs de x seront donc. . . . .

$$x = -\sqrt[3]{(13+\sqrt{44})} - \sqrt[3]{(13-\sqrt{44})}$$

$$x = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{(13+\sqrt{44})} + \frac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{(13-\sqrt{44})}$$

$$x = \frac{1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{(13+\sqrt{44})} + \frac{1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{(13-\sqrt{44})}.$$

(*) Voyez la note de la page 137.

C'eſt-à-dire, que la première eſt négative, & les deux autres imaginaires.

Prenons pour ſecond exemple, l'équation $x^3 - 9x - 10 = 0$. Dans ce cas, on a $p = -9$, $q = -10$; par conſéquent $\frac{1}{3}p = -3$, $\frac{1}{27}p^3 = -27$, $\frac{1}{2}q = -5$ & $\frac{1}{4}q^2 = 25$; donc $\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3 = 25 - 27 = -2$; cette équation eſt donc dans le cas irréductible. Ainſi, ſi l'on veut avoir les valeurs de x, il faut faire uſage des ſéries ci-deſſus. Pour cet effet, on remarquera qu'on a ſuppoſé $m = \frac{1}{2}q$, & $n = \sqrt{(\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}q^2)}$; donc $m = -5$ & $n = \sqrt{2}$. Pour faire les ſubſtitutions, on commencera par evaluer $\sqrt{2}$ qu'on trouvera être 1,4142; donc $\frac{n}{m} = \frac{1,4142}{-5} = -0,2828$; on évaluera auſſi $m^{\frac{1}{3}}$, qui n'eſt autre que $\sqrt[3]{m}$ ou $\sqrt[3]{-5}$ ou $-\sqrt[3]{5}$, & l'on aura $m^{\frac{1}{3}} = -1,7099$; alors il n'y a plus qu'à ſubſtituer : nous nous bornerons à ſubſtituer dans la première qui deviendra $x = +1,7099\ \{2 + \frac{2}{9}(0,2828)^2 - \frac{20}{243}(0,2828)^4\ \&c.\}$ quantité dans laquelle il ne s'agit plus que de faire les multiplications indiquées. Mais il eſt bon d'obſerver en finiſſant, que ces ſéries ne font d'un uſage utile, qu'autant que m eſt plus grand que n; s'il étoit plus petit, on en formeroit d'analogues pour ce cas, en obſervant ce qui a été dit (159). Au reſte, lorſque m & n diffèrent peu, on eſt dans la néceſſité de calculer un grand nombre de termes. Nous verrons par la ſuite comment on peut approcher autrement des valeurs de x.

199. Concluons de ce qui précède, que toute équation de cette forme $y^{3n} + py^{2n} + qy^n + r = 0$ eſt réſoluble; puiſqu'en faiſant $y^n = x$, on a $x^3 + px^2 + qx + r = 0$; c'eſt-à-dire, une équation du troiſième degré.

Application au quatrième degré.

200. Représentons toute équation du quatrième degré sans second terme, par $x^4 + px^2 + qx + r = 0$.

Selon la règle donnée ci-dessus, je prends les deux équations $y^4 - 1 = 0$
Et $ay^3 + by^2 + cy + x = 0$.

Pour éliminer y, je multiplie celle-ci trois fois de suite par y, & je substitue à mesure, au lieu de y^4, sa valeur 1 tirée de l'équation $y^4 - 1 = 0$; ce procédé me donne (en comprenant la seconde équation), les quatre équations suivantes :

$$\begin{aligned} ay^3 + by^2 + cy + x &= 0 \\ by^3 + cy^2 + xy + a &= 0 \\ cy^3 + xy^2 + ay + b &= 0 \\ xy^3 + ay^2 + by + c &= 0 \end{aligned}$$

Si, à l'aide des trois premières, on tire les valeurs de y^3, y^2 & y, on aura $y^3 = \frac{-x^3 + b^2x - bc^2 + 2acx - a^2b}{ax^2 - 2bcx + ab^2 + c^3 - a^2c}$, $y^2 = \frac{cx^2 - 2abx + a^3 - ac^2 + b^2c}{ax^2 - 2bcx + ab^2 + c^3 - a^2c}$, & $y = \frac{-a^2x + bx^2 - c^2x - b^3 + 2abc}{ax^2 - 2bcx + ab^2 + c^3 - a^2c}$; substituant dans la dernière, on aura, après avoir chassé le dénominateur, fait les réductions ordinaires, & changé les signes,

$$\begin{array}{llll} x^4 - 4acx^2 & + 4a^2bx & - a^4 & = 0 \\ - 2bbx^2 & + 4bc^2x & - c^4 & \\ & & + b^4 & \\ & & + 2a^2c^2 & \\ & & - 4ab^2c & \end{array}$$

pour que cette équation soit la même que $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, il faut donc que $-4ac - 2b^2 = p$, $4a^2b + 4bc^2 = q$,

$-a^4-c^4+b^4+2a^2c^2-4ab^2c=r$; ce ſont ces trois équations qui doivent faire connoître a, b & c.

Pour avoir l'équation qui donnera b, je prends dans la ſeconde la valeur de a^2+c^2, en diviſant par $4b$; & j'ai $a^2+c^2=\frac{q}{4b}$; je quarre cette équation, ce qui me donne $a^4+2a^2c^2+c^4=\frac{qq}{16b^2}$; & par conſéquent $a^4+c^4=\frac{qq}{16b^2}-2a^2c^2$; je ſubſtitue cette valeur de a^4+c^4 dans la troiſième équation, & j'ai $-\frac{qq}{16b^2}+4a^2c^2+b^4-4ab^2c=r$. De la première équation $-4ac-2b^2=p$, je tire la valeur de ac, qui eſt $ac=\frac{-p-2b^2}{4}$; ſubſtituant dans l'équation $-\frac{qq}{16b^2}+4a^2c^2$, &c. j'ai $-\frac{qq}{16b^2}+4\left(\frac{-p-2b^2}{4}\right)^2+b^4-4b^2.\left(\frac{-p-2b^2}{4}\right)=r$, ou $-\frac{qq}{16b^2}+\frac{4p^2+16pb^2+16b^4}{16}+b^4+\frac{4pb^2+8b^4}{4}=r$, ou enfin, chaſſant les fractions, tranſpoſant, réduiſant, & ordonnant par rapport à b

$$\begin{array}{l}64b^6+32pb^4+4p^2b^2-qq=0\\ \qquad\qquad\qquad -16rb^2\end{array}$$

Équation du ſixième degré, mais qui n'a que la difficulté de celles du troiſième, en regardant b^2 comme l'inconnue: on appelle cette équation *la réduite*, parce que c'eſt à ſa réſolution que ſe réduit celle des équations du quatrième degré.

201. Si l'on fait attention que le dernier terme q^2 de cette équation a le ſigne $-$, on verra que b^2 doit avoir au moins une valeur poſitive; car dans ce cas l'équation ne peut avoir été produite que par la multiplication de trois facteurs tels que $(b^2-l)(b^2-m)(b^2-n)$, ou de trois facteurs tels que $(b^2+l)(b^2+m)(b^2-n)$; il n'y a que ces deux combinaiſons qui puiſſent donner le ſigne $-$ au dernier terme;

il y aura donc au moins un facteur de cette forme $b^2 - n$; donc (178) $b^2 = n$, c'est-à-dire, que b^2 aura au moins une valeur positive. Donc puisque cette équation donne $b = \pm\sqrt{n}$, b aura donc au moins deux valeurs réelles.

202. Déterminons maintenant a & c. Les deux équations $-4ac - 2b^2 = p$, & $4a^2b + 4bc^2 = q$ trouvées ci-dessus, donnent $2ac = -\frac{1}{2}p - b^2$ & $a^2 + c^2 = \frac{q}{4b}$. Ajoutant la première à la seconde, & la retranchant aussi de la seconde, on aura les deux équations suivantes :

$$a^2 + 2ac + c^2 = \frac{q}{4b} - \frac{1}{2}p - b^2$$

$$a^2 - 2ac + c^2 = \frac{q}{4b} + \frac{1}{2}p + b^2$$

tirant la racine quarrée de chacune, on aura . . . .

$$a + c = \pm\sqrt{\left(\frac{q}{4b} - \frac{1}{2}p - b^2\right)}$$

$$\& \ a - c = \pm\sqrt{\left(\frac{q}{4b} + \frac{1}{2}p + b^2\right)}$$

Les deux signes de chaque équation pouvant être pris dans tel ordre que l'on voudra.

De-là il est aisé de déduire a & c; mais nous allons voir qu'on n'a besoin que de $a + c$ & de $a - c$. Développons auparavant les quatre valeurs de x.

L'équation $ay^3 + by^2 + cy + x = 0$, donne $x = -ay^3 - by^2 - cy$; il s'agit donc d'avoir les quatre valeurs de y que peut donner l'équation $y^4 - 1 = 0$, ou $y^4 = 1$. Or en tirant la racine quatrième, on a $y = \pm\sqrt[4]{1} = \pm 1$, c'est-à-dire, $y = 1$ & $y = -1$. Ayant trouvé ces deux valeurs de y, il faut (187) pour avoir les deux autres, diviser $y^4 - 1$ par le produit $y^2 - 1$ des deux facteurs $y - 1$ & $y + 1$,

ce qui donne y^2+1 pour quotient ; égalant ce quotient à zéro (187) on aura $y^2+1=0$, pour l'équation qui doit donner les deux autres racines, que l'on trouvera être $y=+\sqrt{-1}$ & $y=-\sqrt{-1}$.

Les quatre valeurs de x seront donc . . . .

$x=-a-b-c$ ou $x=-b-(a+c)$

$x=a-b+c$ ou $x=-b+(a+c)$

$x=a\sqrt{-1}+b-c\sqrt{-1}$ ou $x=+b+(a-c)\sqrt{-1}$

$x=-a\sqrt{-1}+b+c\sqrt{-1}$ ou $x=+b-(a-c)\sqrt{-1}$

Substituant, au lieu de $a+c$ & $a-c$, leurs valeurs trouvées ci-dessus, & faisant attention que $\pm\sqrt{\left(\frac{q}{4b}+\frac{1}{2}p+b^2\right)}\times\sqrt{-1}$. $=\pm\sqrt{\left(-\frac{q}{4b}-\frac{1}{2}p-b^2\right)}$, on aura . . . .

$x=-b\mp\sqrt{\left(\frac{q}{4b}-\frac{1}{2}p-b^2\right)}$, $x=-b\pm\sqrt{\left(\frac{q}{4b}-\frac{1}{2}p-b^2\right)}$.

$x=+b\pm\sqrt{\left(-\frac{q}{4b}-\frac{1}{2}p-b^2\right)}$, $x=+b\mp\sqrt{\left(-\frac{q}{4b}-\frac{1}{2}p-b^2\right)}$.

Equations dans lesquelles il est facile de voir que des deux signes + & −, soit qu'on prenne le signe supérieur, soit qu'on prenne le signe inférieur, on aura toujours les quatre mêmes valeurs de x, l'une quelconque d'entre elles ne faisant alors que se changer en l'une des autres. Ainsi, pour une même valeur de b, on n'aura jamais que quatre valeurs de x ; savoir :

$x=-b-\sqrt{\left(\frac{q}{4b}-\frac{1}{2}p-b^2\right)}$, $x=-b+\sqrt{\left(\frac{q}{4b}-\frac{1}{2}p-b^2\right)}$.

$x=+b+\sqrt{\left(-\frac{q}{4b}-\frac{1}{2}p-b^2\right)}$, $x=+b-\sqrt{\left(-\frac{q}{4b}-\frac{1}{2}p-b^2\right)}$.

203. Puisque l'équation du sixième degré qui doit donner b, donne trois valeurs de b^2, on aura donc trois valeurs de b, qui auront le signe +, & trois qui auront le signe − ; or il est facile de voir que soit qu'on mette $+b$, soit qu'on mette

mette $-b$ dans les quatre dernières valeurs de x, il en résulte toujours les quatre mêmes valeurs. Il ne s'agit donc plus que de faire voir, que chacune des trois valeurs de b qui auront le signe $+$, ne donnera jamais aussi que les mêmes quatre valeurs de x.

Pour le démontrer, reprenons les équations $-4ac-2b^2=p$, $4a^2b+4bc^2=q$, & $-a^4-c^4+b^4+2a^2c^2-4ab^2c=r$. Quarrons la deuxième de ces équations; nous aurons $16b^2(a^2+c^2)^2=qq$; mettons, au lieu de b^2, sa valeur $\frac{-p-4ac}{2}$ tirée de la première; il viendra $-8(p+4ac)(a^2+c^2)^2=qq$. Substituons de même, au lieu de b^2, sa valeur dans la troisième équation, & nous aurons, après les réductions faites, $-a^4-c^4+\frac{pp}{4}+4pac+14a^2c^2=r$.

Reprenons maintenant l'équation du sixième degré. . . . .

$$\begin{array}{l} 64b^6+32pb^4+4ppb^2-qq=0. \\ \qquad\qquad\qquad -16rb^2 \end{array}$$

Et substituons-y pour qq & pour r leurs valeurs que nous venons de calculer. Nous aurons après les réductions faites, & après avoir divisé par 8, l'équation suivante . . . .

$$\begin{array}{l} 8b^6+4pb^4+2a^4b^2+(p+4ac)(a^2+c^2)^2=0 \\ \qquad\qquad +2c^4b^2 \\ \qquad\qquad -8pacb^2 \\ \qquad\qquad -28a^2c^2b^2 \end{array}$$

Or puisqu'on a trouvé $2b^2=-p-4ac$, il s'ensuit (187) que $2b^2+p+4ac$ doit diviser l'équation $8b^6+4pb^4$, &c.; ce qui a lieu en effet. Si l'on fait la division, & qu'on égale ensuite à zéro, le quotient, pour avoir les deux autres valeurs de b^2, on aura $4b^4-8acb^2+a^4+c^4+2a^2c^2=0$.

Cette équation étant résolue comme une équation du second

degré, donne $2b^2 = 2ac \pm (a+c)(a-c)\sqrt{-1}$, ou, en doublant, $4b^2 = 4ac \pm 2(a+c)(a-c)\sqrt{-1}$. Or le dernier membre est (*) le quarré de $(a+c) \pm (a-c)\sqrt{-1}$; donc $4b^2 = [(a+c) \pm (a-c)\sqrt{-1}]^2$, & par conséquent (**) $2b = +[(a+c) \pm (a-c)\sqrt{-1}]$, c'est-à-dire, $= (a+c) \pm (a-c)\sqrt{-1}$; ainsi, puisqu'on a trouvé ci-dessus, $b^2 = \frac{-p-4ac}{2}$, les trois valeurs positives de b, sont donc... $b = +\sqrt{\left(\frac{-p-4ac}{2}\right)}$. $b = \frac{1}{2}(a+c) + \frac{1}{2}(a-c)\sqrt{-1}$, $b = \frac{1}{2}(a+c) - \frac{1}{2}(a-c)\sqrt{-1}$. Représentons la seconde de ces valeurs, par b', & la troisième par b''; alors en ajoutant & retranchant, on aura $a+c = b'+b''$ & $(a-c)\sqrt{-1} = b' - b''$.

Si l'on substitue les valeurs de $a+c$ & $(a-c)\sqrt{-1}$ dans les quatre premières valeurs de x trouvées ci-dessus, elles se réduiront à $x = -b - b' - b''$, $x = -b + b' + b''$, $x = +b + b' - b''$, $x = +b - b' + b''$, qu'on peut encore mettre sous cette forme, $x = -b - b' - b''$, $x = +b + b' + b'' - 2b$, $x = +b + b' + b'' - 2b''$, $x = b + b' + b'' - 2b'$. Où l'on voit clairement qu'il ne peut y avoir que quatre valeurs de x; car si l'on change, par exemple, b en b', il faut changer en même temps b' en b, puisqu'on voit que les trois racines b, b', b'' entrent toutes à la fois dans chacune de ces valeurs de x. Or ce changement donne les quatre mêmes valeurs pour x.

(*) Il ne faut autre chose, pour s'en assurer, que quarrer la quantité $(a+c) \pm (a-c)\sqrt{-1}$. Mais si l'on demande comment on a trouvé cela, on le verra dans la suite.

(**) Nous ne prenons ici que le signe + pour la racine du second membre, parce que nous avons vu, ci-dessus, que la valeur négative de b, méneroit aux mêmes conclusions.

204. Revenons maintenant à la première expression des valeurs de x, c'est-à-dire, aux valeurs $x = -b - b - (a+c)$, $x = -b + (a+c)$, $x = +b + (a-c)\sqrt{-1}$, $x = +b - (a-c)\sqrt{-1}$. Elles nous offrent trois cas: ou $a+c$ & $(a-c)\sqrt{-1}$ sont toutes deux réelles, ou elles sont toutes deux imaginaires, ou enfin l'une des deux est réelle, & l'autre imaginaire. Or j'observe d'abord que lorsqu'elles sont imaginaires, elles peuvent toujours être réduites à des imaginaires de cette forme, $\sqrt{-m}$, ou $\sqrt{m}.\sqrt{-1}$, m étant une quantité réelle; car puisqu'on a $a+c = \sqrt{\left(\frac{q}{4b} - \frac{1}{2}p - b^2\right)}$ & $(a-c)\sqrt{-1} = \sqrt{\left(-\frac{q}{4b} - \frac{1}{2}p - b^2\right)}$, b ayant toujours (201) au moins une valeur réelle que l'on peut toujours employer, elles ne peuvent devenir imaginaires que lorsque la quantité qui est sous le radical actuel, sera négative (*).

205. Cela posé, si $a+c$ & $(a-c)\sqrt{-1}$ sont toutes deux réelles, auquel cas, les quatre valeurs de x seront réelles, puisque b a toujours une valeur réelle, il est évident que les deux autres valeurs de $4b^2$, savoir: $[(a+c) \pm (a-c)\sqrt{-1}]^2$ seront réelles & positives.

206. Si au contraire $a+c$ & $(a-c)\sqrt{-1}$ sont toutes deux imaginaires, auquel cas les quatre valeurs de x seront imaginaires, alors si on représente $a+c$ par $k\sqrt{-1}$ & $(a-c)\sqrt{-1}$ par $l\sqrt{-1}$, k & l seront des quantités réelles, selon ce qui vient d'être dit (204); on aura donc $4b^2 = [(k \pm l)\sqrt{-1}]^2 = -(k \pm l)^2$; c'est-à-dire, que les deux autres valeurs de b^2 seront réelles, mais négatives.

(*) Il n'en seroit pas de même, si b n'avoit aucune valeur réelle. Car b étant une imaginaire de cette forme $\sqrt{-k}$, $a+c$ & $(a-c)\sqrt{-1}$ pourroient être des imaginaires de cette forme $\sqrt{\left(-\frac{m}{\sqrt{-k}} - h\right)}$.

207. Enfin, si des deux quantités $a+c$ & $(a-c)\sqrt{-1}$, l'une seulement est réelle, il est évident que, des quatre valeurs de x, deux seront réelles, & deux imaginaires; or dans ce cas on voit aussi clairement, que les deux valeurs de $4b^2$ exprimées par $[(a+c) \pm (a-c)\sqrt{-1}]^2$ seront imaginaires.

208. Donc si la réduite, considérée comme équation du troisième degré, a ses trois racines réelles & positives, l'équation du quatrième degré aura ses quatre racines réelles.

Si la réduite, ayant ses trois racines réelles, n'en a qu'une positive, l'équation du quatrième degré aura ses quatre racines imaginaires.

Enfin, de ces quatre racines, deux seront réelles & deux seront imaginaires, si la réduite n'a qu'une racine réelle.

209. Puisque la formule des racines d'une équation du troisième degré, ne donne ces racines sous une forme réelle, que lorsqu'il n'y a qu'une racine réelle (197), il faut conclure qu'on n'aura les racines du quatrième degré sous une forme réelle, que lorsqu'il n'y aura que deux de ces racines qui soient réelles.

210. Voyons quelques exemples. Supposons qu'on demande les racines de l'équation $x^4+3x^2-52x+48=0$. Nous avons ici $p=3$, $q=-52$, $r=48$, & par conséquent $qq=2704$. La réduite sera donc $64b^6+96b^4-732b^2-2704=0$, ou (en faisant, pour simplifier, $4b^2=u$), $u^3+6u^2-183u-2704=0$. Pour faire disparoître le second terme, je fais $u=z-2$, ce qui me donne $z^3-195z-2322=0$.

Selon ce qui a été dit (197) sur les équations du troisième degré, on trouvera que z n'a qu'une valeur réelle qui est

$z = -\sqrt[3]{[-1161 + (\sqrt{1073296})]} - \sqrt[3]{[-1161 - \sqrt{(1073296)}]}$, or $\sqrt{1073296}$ eſt 1036 ; on a donc $z = -\sqrt[3]{(-1161 + 1036)} - \sqrt[3]{(-1161 - 1036)}$; c'eſt-à-dire, $z = -\sqrt[3]{-125} - \sqrt[3]{-2197}$, ou $z = \sqrt[3]{125} + \sqrt[3]{2197}$, ou $z = 5 + 13 = 18$. Donc puiſque $u = z - 2$, on a $u = 18 - 2 = 16$; par conſéquent $4b^2 = u = 16$; donc $b^2 = 4$ & $b = 2$. Subſtituant cette valeur de b, & celles de p, q & r, dans les valeurs de $a + c$ & de $(a - c)\sqrt{-1}$ trouvées ci-deſſus, on aura $a + c = \sqrt{(-\frac{12}{8} - \frac{5}{2} - 4)} = \sqrt{-12}$; & $(a - c)\sqrt{-1} = \sqrt{(\frac{12}{8} - \frac{3}{2} - 4)} = \sqrt{1} = 1$. Donc les quatre valeurs de x feront $x = -2 - \sqrt{-12}$, $x = -2 + \sqrt{-12}$, $x = +2 + 1$ & $x = +2 - 1$. Ainſi les deux valeurs réelles font $x = 3$, & $x = 1$.

Dans cet exemple, les nombres ſe ſont trouvés tels, qu'il a été poſſible d'évaluer exactement chaque radical. Mais ces cas ſont fort rares. Le plus ſouvent, lorſqu'on veut avoir la valeur numérique dégagée de radicaux, il faut évaluer chaque radical par approximation.

Prenons pour ſecond exemple, l'équation $y^4 + 4y^3 + 9y^2 + 12y + 3 = 0$. Je commence par faire diſparoître le ſecond terme en faiſant (192) $y = x - 1$: j'ai pour nouvelle équation $x^4 + 3x^2 + 2x - 3 = 0$. On a donc ici, $p = 3$, $q = 2$, $r = -3$; ainſi la réduite devient $64b^6 + 96b^4 + 84b^2 - 4 = 0$; ou, en faiſant $4b^2 = u$, $u^3 + 6u^2 + 21u - 4 = 0$. Je fais diſparoître le ſecond terme, en poſant $u = z - 2$, ce qui donne $z^3 + 9z - 30 = 0$, équation qui (197) n'a qu'une racine réelle, & qui annonce, par conſéquent (208), que l'équation du quatrième degré n'en aura que deux réelles. Appliquant donc les formules données (195), on trouvera $z = -\sqrt[3]{(-15 + \sqrt{252})} - \sqrt[3]{(-15 - \sqrt{252})}$,

ou $z = \sqrt[3]{(15 - \sqrt{252})} + \sqrt[3]{(15 + \sqrt{252})}$; donc $u =$ $z - 2 = -2 + \sqrt[3]{(15 - \sqrt{252})} + \sqrt[3]{(15 + \sqrt{252})}$; donc puisque $4b^2 = u$, & par conséquent $b = \sqrt{\frac{u}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{u}$, on a $b = \frac{1}{2}\sqrt{[-2 + \sqrt[3]{(15 - \sqrt{252})} + \sqrt[3]{(15 + \sqrt{252})}]}$. Substituant cette valeur de b, & celle de p & de q, dans les formules des quatre valeurs générales de x, on trouvera que les deux valeurs réelles sont comprises dans cette équation....:

$$x = -\frac{1}{2}\sqrt{[-2 + \sqrt[3]{(15 - \sqrt{252})} + \sqrt[3]{(15 + \sqrt{252})}]}$$
$$\pm \sqrt{\frac{1}{\sqrt{[-2 + \sqrt[3]{(15 - \sqrt{252})} + \sqrt[3]{(15 + \sqrt{252})}]}} - 1 - \frac{1}{4}\sqrt[3]{(15 - \sqrt{252})} - \frac{1}{4}\sqrt[3]{(15 + \sqrt{252})}}.$$

Réflexions sur la Méthode précédente, & sur son application aux Équations des degrés supérieurs au quatrième.

211. L'équation qui nous a donné la valeur de b pour le quatrième degré, n'a monté qu'au sixième degré ; mais si nous avions cherché directement l'équation qui doit donner a, ou celle qui doit donner c, nous serions parvenus à une équation du vingt-quatrième degré, ainsi qu'on peut s'en convaincre de la manière suivante. Nous avons trouvé ci-dessus (203), en tranformant la réduite, $-8(p + 4ac) \times (a^2 + c^2)^2 = qq$, & $-a^4 - c^4 + \frac{pp}{4} + 4pac + 14a^2c^2 = r$. Si l'on multiplie cette dernière équation, par $8(p + 4ac)$, & que du produit on retranche la première, on aura, après les réductions faites,

$$\begin{aligned} 512a^3c^3 + 256pa^2c^2 &+ 40ppac + 2p^3 = 0 \\ &- 32rac - 8pr \\ &\qquad\quad + qq \end{aligned}$$

Équation qui étant combinée avec l'équation $-a^4 - c^4 +$ &c. $= r$, pour éliminer c, donnera (169) une équation du vingt-quatrième degré.

Mais sans se donner la peine de faire ce calcul, on peut s'en assurer encore de cette autre manière.

L'équation $-8(p+4ac)(a^2+c^2)^2 = qq$ donne $(a^2+c^2)^2 = -\frac{qq}{8(p+4ac)}$, & par conséquent $a^4 + c^4 = -\frac{qq}{8(p+4ac)} - 2a^2c^2$. Or si l'on résout l'équation $512a^3c^3 +$ &c. qui, en considérant ac comme l'inconnue, est du troisième degré, on aura une valeur de ac, qui étant substituée dans le second membre de l'équation $a^4 + c^4 =$ &c. en fera une quantité toute connue que j'appelle A ; si l'on représente maintenant par B, cette valeur de ac, on aura $c = \frac{B}{a}$; donc l'équation $a^4 + c^4 = A$, deviendra $a^8 - Aa^4 = -B^4$, qui ayant huit racines, donnera huit valeurs de a. Or ac a trois valeurs ; on aura donc trois équations du huitième degré, & par conséquent 24 valeurs pour a ; donc l'équation en a sera du vingt-quatrième degré.

212. Mais on voit en même temps que les exposans de toutes les puissances de a, que cette équation renfermera, seront des multiples de 4, puisque (183) elle sera le produit de trois quantités de la forme de $a^8 - Aa^4 + B^4$, devant renfermer les 24 racines que ces trois-ci fournissent. Donc si l'on y fait $a^4 = u$, on aura en u, une équation du sixième degré. Or je dis que cette équation ne peut renfermer que des radicaux quarrés & des radicaux cubes, ce qui est évident en résolvant l'équation $a^8 - Aa^4 = -B^4$ comme une équation du second degré ; car alors on aura $a^4 = \frac{1}{2}A \pm \sqrt{(\frac{1}{4}AA - B^4)}$, quantité dans laquelle A & B ne peuvent être composés que

de radicaux quarrés & de radicaux cubes, puiſqu'ils ne dépendent que d'une équation du troiſième degré.

213. Si l'on ſe rappelle maintenant ce que nous avons vu ſur le troiſième degré, où la réduite étoit $a^6 - qa^3 = \frac{1}{27}p^3$; il eſt clair que a^3 ne peut renfermer que des radicaux quarrés. Enfin il eſt évident que dans l'équation du ſecond degré ſans ſecond terme, $x^2 + p = 0$ en faiſant comme ci-deſſus $y^2 - 1 = 0$ & $ay + x = 0$, la réduite ſera $a^2 + p = 0$, qui ne donne qu'une valeur pour a^2; ainſi la réduite du ſecond degré ne donne pour a^2 qu'un radical du premier degré, c'eſt-à-dire, une quantité ſans radical.

Donc en remontant, on conclura par analogie, que ſi la réduite du cinquième degré ne renferme d'autres puiſſances de a, que celles qui ſont des multiples de 5, la valeur de a^5 ne renfermera que des radicaux quatrièmes, des radicaux cubes & des radicaux quarrés; donc ſi l'on démontre que par la méthode actuelle, cette réduite ne peut renfermer que des puiſſances de a, dont les expoſans ſoient des multiples de 5, il s'enſuivra que cette même méthode réduit la difficulté des équations du cinquième degré, à celle des degrés inférieurs. Or voici comment on peut s'aſſurer que la réduite n'aura pas d'autres puiſſances de a.

214. Suppoſant que $x^5 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$, repréſente généralement toute équation du cinquième degré. Et prenant, ſelon la méthode, les deux équations $y^5 - 1 = 0$, & $ay^4 + by^3 + cy^2 + dy + x = 0$, on aura, après avoir chaſſé y de la même manière qu'on l'a pratiqué dans le troiſième & le quatrième degré, on aura, dis-je . . . . . .

$$\begin{array}{llllll}
x^5 & -5adx^3 & +5bd^2x^2 & -5cd^3x & +a^5 & =0 \\
 & -5bcx^3 & +5a^2cx^2 & -5a^3bx & +b^5 & \\
 & & +5c^2dx^2 & -5b^3dx & +c^5 & \\
 & & +5ab^2x^2 & -5ac^3x & +d^5 & \\
 & & & +5a^2d^2x & -5a^3cd & \\
 & & & +5b^2c^2x & -5ab^3c & \\
 & & & -5abcdx & -5abd^3 & \\
 & & & & -5bc^3d & \\
 & & & & +5a^2bc^2 & \\
 & & & & +5a^2b^2d & \\
 & & & & +5b^2cd^2 & \\
 & & & & +5ac^2d^2 &
\end{array}$$

Ayant donc égalé le coëfficient de x^3, à p; celui de x^2, à q; celui de x, à r; & enfin la totalité des termes sans x, à s; on aura quatre équations dans lesquelles si l'on fait $b = ga^2$, $c = ha^3$, $d = ka^4$, ce qui est très-permis, ces quatre équations se changeront en quatre autres qui renfermeront g, h, k & a; mais il n'y aura d'autres puissances de a que a^5, a^{10}, &c.; donc si l'on conçoit qu'on ait éliminé g, h & k, l'équation finale ne renfermera pas d'autres puissances de a, que celles dont les exposans seront des multiples de 5.

215. On voit donc, d'après tout ce qui précède, qu'à l'égard de a, c'est-à-dire, à l'égard du premier coëfficient dans l'équation $ay^{m-1} + by^{m-2} + .$ &c. $+ x = 0$, la réduite est du second degré ou du degré 1 . 2, pour le second degré. Dans le troisième, elle est du sixième degré, ou du degré 1 . 2 . 3. Dans le quatrième, elle est du vingt-quatrième, ou du degré 1 . 2 . 3 . 4. Il y a donc bien lieu de croire que, dans le cinquième, elle sera du degré 1 . 2 . 3 . 4, 5,

c'eſt-à-dire, du 120e. ; & du 720e dans le ſixième degré ; & ainſi de ſuite.

Et quoique, dans le quatrième degré, on trouve une réduite qui n'eſt que du ſixième degré, c'eſt une ſimplification accidentelle, qui probablement aura lieu d'une manière analogue dans les équations dont l'expoſant eſt un nombre compoſé, mais non dans celles dont l'expoſant eſt un nombre premier. En effet, il eſt facile de voir pour le 4e. degré, que cette ſimplification eſt due à ce que b, dans chacune des équations où il entre, a des relations ſemblables à l'égard de a & à l'égard de c; au lieu que a n'eſt pas diſpoſé de la même manière à l'égard de b qu'à l'égard de c. Mais dans le cinquième degré, il n'y a aucune des quantités a, b, c, d dont on puiſſe dire ce que nous venons de dire de b, dans le quatrième ; ce qui eſt facile à voir par les coëfficiens de l'équation $x^5 - 5(ad + bc)x^3 +$ &c., $= 0$, rapportée ci-deſſus.

216. Quoi qu'il en ſoit, puiſque la réduite du cinquième degré ne peut renfermer d'autres puiſſances de a que celles dont les expoſans ſont des multiples de 5, il paroît donc qu'en y faiſant $a^5 = u$, l'équation du 24e. degré qu'on aura alors, ne peut plus renfermer que des $\sqrt[4]{}$, des $\sqrt[3]{}$ & des $\sqrt{}$, puiſque l'équation $a^5 = u$, donnant $a = \sqrt[5]{u}$, met en évidence les radicaux cinquièmes que doit renfermer l'équation propoſée.

On voit par-là ce qu'il y a à dire ſur les degrés plus élevés. Ceux qui deſireront plus de détails ſur cette matière, peuvent conſulter les *Mém. de l'Acad. des Sciences, années* 1762 & 1765, où l'on trouvera, en même temps pluſieurs claſſes d'équations qui admettent une réſolution algébrique facile, ainſi qu'une autre méthode déduite de celle que nous venons d'expoſer, &

qui simplifie le travail dans les équations dont l'exposant n'est pas un nombre premier.

217. Notre méthode suppose, comme on le voit, qu'on puisse toujours avoir toutes les racines de l'équation à deux termes, $y^n - 1 = 0$. Or c'est ce qui ne souffre aucune difficulté, puisqu'en ayant toujours au moins une, par une simple extraction de la racine du degré n, c'est-à-dire, ayant toujours $y = 1$, lorsque n est impair, & $y = 1$, $y = -1$ lorsque n est pair, la difficulté d'avoir les autres, est tout au plus de résoudre une équation du degré $n - 1$, ce qu'on est censé savoir déjà, lorsqu'on passe à la résolution d'une équation générale du degré n. Mais la difficulté n'est pas même de ce degré; elle n'est, en général, que du degré $\frac{n-1}{2}$, lorsque n est impair, & du degré $\frac{n-2}{2}$ lorsque n est pair, parce qu'après avoir divisé l'équation $y^n - 1$ par sa racine $y - 1$ lorsque n est impair, ou par $(y - 1) \times (y + 1)$, c'est-à dire, par $y^2 - 1$ lorsque n est pair, le quotient, ou l'équation qui doit donner les autres racines, sera toujours de cette forme $y^k + y^{k-1} + y^{k-2} + y^{k-3} +$ &c., $\ldots + 1 = 0$, k étant un nombre pair. Or cette équation est décomposable en un nombre $\frac{k}{2}$ de facteurs du second degré, tels que $y^2 + hy + 1$; & l'équation qui donnera h, ne montera jamais qu'au degré $\frac{k}{2}$. Je ne m'arrête pas à démontrer en détail cette dernière proposition; on s'en assurera en prenant, par exemple, pour $y^8 + y^7 + y^6 + y^5 + y^4 + y^3 + y^2 + y + 1$, une quantité telle que $y^6 + ay^5 + by^4 + cy^3 + dy^2 + ey + 1$, la multipliant par $y^2 + hy + 1$, & égalant le produit, terme à terme, à $y^8 + y^7 +$ &c.; on aura des équations dont il sera facile de tirer a, b, c, d, e; & l'équation en h, sera du

quatrième degré. Voyez, pour la démonstration générale, *le tome VI des Mém. de Pétersbourg.*

Des Diviseurs commensurables des Équations.

218. On voit, par ce qui précède, que l'expression générale des racines des équations étant un composé de radicaux de différens degrés & différemment mêlés entre eux, il peut très-bien arriver que quoique la valeur d'une ou de plusieurs racines soit un nombre commensurable, néanmoins, elle se présente sous une forme incommensurable ; & c'est ce qui arrive en effet dans le troisième & le quatrième degré, & qui arrivera, plus que probablement, dans les autres degrés. Il est donc utile d'avoir une méthode pour trouver ces diviseurs commensurables, lorsqu'il y en a.

Comme le dernier terme d'une équation est le produit de toutes les racines (180), aucun nombre ne peut donc être la valeur commensurable de x dans une équation, qu'autant qu'il sera diviseur exact du dernier terme. On pourroit donc prendre successivement tous les diviseurs du dernier terme, & les substituer successivement tant en $+$ qu'en $-$, (car x peut avoir aussi bien des valeurs négatives comme des positives), au lieu de x dans l'équation : alors le diviseur qui, substitué ainsi, réduiroit toute l'équation à zéro, seroit la valeur de x. Bien entendu, que nous supposons ici, qu'on a fait passer tous les termes de l'équation dans un seul membre.

Mais cette opération seroit souvent très-longue ; nous allons faire voir à quel caractère on distingue ceux qu'on doit admettre & ceux qu'on doit rejetter ; mais auparavant, il faut exposer comment on trouve tous les diviseurs d'un nombre.

219. Pour trouver tous les diviseurs d'un nombre, il faut le

divifer fucceffivement par les nombres premiers par lefquels il pourra être divifé, en commençant par les plus fimples, & continuer de divifer par le même nombre tant que cela fe pourra. Alors on écrit à part & fur une même ligne tous ces nombres premiers, & chacun autant de fois qu'il a pu divifer. On les multiplie enfuite, deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, &c.; ces produits & les nombres premiers qu'on a trouvés, & l'unité, forment tous les divifeurs cherchés.

Par exemple, veut-on avoir tous les divifeurs de 60? Je divife 60 par 2, ce qui me donne 30; je divife 30 par 2, ce qui me donne 15; je divife 15 par 3, ce qui me donne 5; enfin je divife 5 par 5, ce qui me donne 1. Ainfi les divifeurs premiers font 2, 2, 3, 5; je les multiplie deux à deux, ce qui me donne 4, 6, 10, 6, 10, 15.

Je les multiplie trois à trois, & j'ai, 12, 20, 30, 30; enfin les multipliant quatre à quatre, j'ai 60.

Raffemblant tous ces divifeurs, en rejettant cependant ceux qui fe trouvent répétés, j'ai, en y comprenant l'unité qui eft divifeur de tout nombre, ...

1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.

220. Suppofons maintenant qu'on veut avoir les divifeurs commenfurables d'une équation, lorfqu'elle en a. Par exemple, d'une équation du quatrième degré, repréfentée généralement par $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$. Repréfentons ce divifeur par $x + a$; alors l'équation propofée peut donc (183) être confidérée comme ayant été formée de la multiplication de $x + a$ par un facteur du 3e. degré, tel que $x^3 + kx^2 + mx + n$; multiplions donc ces deux facteurs l'un par l'autre; nous aurons

$$\begin{aligned} x^4 + kx^3 + mx^2 + nx + an &= 0 \\ + ax^3 + akx^2 + amx & \end{aligned}$$

qui devant être la même chose que $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$, donne les équations suivantes $k+a=p$, $m+ak=q$, $n+am=r$, $an=s$, ou $n=\frac{s}{a}$, $m=\frac{r-n}{a}$, $k=\frac{q-m}{a}$, $1=\frac{p-k}{a}$.

Supposons donc maintenant qu'ayant pris pour a un des diviseurs du dernier terme, je veux savoir s'il peut être admis; les équations $n=\frac{s}{a}$, $m=\frac{r-n}{a}$ &c., me disent; divisez le dernier terme de l'équation par ce diviseur; retranchez le quotient du coëfficient de x, & divisez le reste par ce même diviseur; retranchez ce second quotient, du coëfficient de x^2, & divisez le reste, encore, par le même diviseur; & continuez toujours de même jusqu'à ce que vous soyiez arrivé au coëfficient du second terme de l'équation, pour lequel vous devez trouver 1 pour quotient. Si le diviseur que vous avez pris, satisfait à toutes ces divisions, il peut sûrement être pris pour a; mais si l'une seulement de ces divisions ne peut être faite exactement, le nombre que vous avez choisi doit être rejetté.

Comme l'unité est toujours diviseur de tout nombre, il est visible qu'il faudra aussi tenter l'unité, tant en $+$ qu'en $-$; mais on aura plutôt fait pour celle-ci de l'examiner en substituant successivement $+1$ & -1 au lieu de x dans l'équation; substitution qui est très-facile, puisque toute puissance de $+1$ est $+1$, & que toute puissance paire de -1 est $+1$, & toute puissance impaire, -1. Si ni l'une ni l'autre de ces deux substitutions ne donne 0 pour résultat, alors a ne peut être ni $+1$, ni -1.

Cela posé, voici comment on procédera à l'examen de tous les diviseurs du dernier terme, autres que l'unité.

Supposons qu'on demande si l'équation $x^4 - 9x^3 + 23x^2 - 20x + 15 = 0$, a quelque diviseur commensurable, je cherche les diviseurs du dernier terme 15, autres que l'unité; les ayant trouvés, je les écris par ordre de grandeur (en les prenant tant en + qu'en —) comme on le voit ici à la première ligne des nombres. . . . .

$$x^4 - 9x^3 + 23x^2 - 20x + 15 = 0$$

Diviseurs de 15....	+ 15,	+ 5,	+ 3,	— 3,	— 5,	— 15
	+ 1,	+ 3,	+ 5,	— 5,	— 3,	— 1
	— 21,	— 23,	— 25,	— 15,	— 17,	— 19
				+ 5		
				+ 18		
				— 6		
				— 3		
				+ 1		

Je divise le dernier terme + 15 par chacun des nombres de la première ligne, & j'écris les quotiens, pour seconde ligne.

Je retranche chaque terme de la seconde ligne, du coëfficient de x, c'est-à-dire, de — 20, & j'écris les restes pour la troisième ligne.

Je divise chaque terme de celle-ci par le terme correspondant de la première ligne, & à mesure que je trouve un quotient exact, je l'écris. Ici je n'en trouve qu'un, savoir + 5; ainsi je suis sûr qu'il ne peut y avoir qu'un diviseur commensurable. Mais soit qu'il n'y ait qu'un quotient exact, soit qu'il y en ait plusieurs, on continuera en cette manière.

Je retranche chaque quotient, du coëfficient 23 de x^2, & j'écris les restes pour cinquième ligne; c'est ici 18.

Je divise, de même que ci-devant, chacun de ces restes par le terme correspondant de la première ligne, & j'écris chaque quotient au-dessous; c'est ici — 6.

Je retranche chacun de ces nouveaux quotiens, du coëfficient — 9 de x^3; j'écris les restes au-dessous; c'est ici — 3.

Enfin je divise ceux-ci, encore par le terme correspondant de la première suite. Je trouve pour quotient + 1; d'où je conclus que le terme correspondant — 3, de la première ligne, est a; & que par conséquent le diviseur $x + a$, est $x - 3$; c'est-à-dire, que $x - 3$ divise l'équation: donc $x = 3$ est la valeur commensurable de x dans l'équation proposée.

Non-seulement, par cette méthode, on trouve le diviseur de l'équation; mais on trouve encore le quotient. Il n'y a qu'à prendre dans la colonne qui a satisfait, les nombres qui se trouvent sur les lignes de numéro pair à compter de la première; ces nombres formeront le dernier terme, & les coëfficiens successifs de x, x^2, x^3, &c., dans le second facteur de l'équation. Ici, par exemple, on trouve — 5, + 5, — 6 + 1; j'en conclus que le second facteur est $1x^3 - 6x^2 + 5x - 5$, ou $x^3 - 6x^2 + 5x - 5$; ensorte que l'équation proposée, est le produit de $x - 3$ par $x^3 - 6x^2 + 5x - 5$.

Nous prendrons pour second exemple, l'équation suivante.

$$x^3 + 2x^2 - 33x + 14 = 0$$

Diviseurs de 14....	+ 14,	+ 7,	+ 2,	— 2,	— 7,	— 14
	+ 1,	+ 2,	+ 7,	— 7,	— 2,	— 1
	— 34,	— 35,	— 40,	— 26,	— 31,	— 32
		— 5,	— 20,	+ 13,		
		+ 7,	+ 22,	— 11,		
		+ 1,	+ 11,			

En

En opérant comme dans l'exemple précédent, on ne trouve que les diviſeurs 7 & 2, qui ſoutiennent l'épreuve juſqu'à la dernière ligne; mais le ſecond, c'eſt-à-dire 2, ne peut ſatisfaire, parce que le dernier quotient qu'il donne, eſt 11, au lieu qu'il doit être 1. Ainſi il n'y a qu'un diviſeur commenſurable, & c'eſt $x + 7$.

221. Cette méthode s'applique également aux équations littérales; ſi elles ont le même nombre de dimenſions dans chaque terme, alors on n'écrira en première ligne, que ceux des diviſeurs du dernier terme de l'équation, qui ne ſont que d'une dimenſion. Si le nombre des dimenſions de chaque terme n'eſt pas le même, on le rendra tel, en introduiſant une lettre dont les puiſſances complettent ce nombre de dimenſions.

Quand le nombre des dimenſions eſt le même dans chaque terme d'une équation, on dit alors que l'équation eſt homogène.

222. Nous avons ſuppoſé que le premier terme n'avoit aucun coëfficient; s'il en avoit un, le diviſeur, au lieu d'être ſimplement $x + a$, ſeroit en général $mx + a$; & m ſeroit quelqu'un des facteurs du coëfficient du premier terme. Alors ſi l'on vouloit faire uſage de la méthode précédente, il faudroit pour chaque facteur, au lieu de la ſeconde ligne, employer cette ſeconde ligne multipliée par m; au lieu de la quatrième, employer cette quatrième multipliée par m, & ainſi de ſuite; & n'admettre pour a, que les termes de la première, qui auroient pour correſpondans dans la dernière, le ſecond facteur du premier terme de l'équation propoſée; mais il ſuffira de prendre en + les nombres que l'on eſſaiera pour m. Au reſte, on peut ramener

ce cas au précédent, en faisant évanouir ce coëfficient, par la méthode donnée (191).

223. Lorsqu'une équation n'a pas de diviseur commensurable du premier degré, elle peut néanmoins en avoir du second. On peut trouver ceux-ci par une méthode analogue à celle que nous venons d'exposer; mais les calculs deviennent très-longs. On aura aussi-tôt fait en cette manière. Représentez ce facteur par $x^2 + mx + n$; multipliez-le par un autre facteur convenable pour produire une quantité du degré de l'équation proposée, c'est-à-dire par un facteur du troisième degré, tel que $x^3 + ax^2 + bx + c$, si l'équation proposée est du cinquième. Égalez le produit terme à terme avec l'équation, vous aurez autant d'équations particulières que d'inconnues a, b, c, m, n, &c. De ces équations vous tirerez aisément les valeurs de a, b, c, que vous substituerez dans les équations restantes; alors vous aurez deux équations qui ne renfermeront plus d'inconnues que m & n. Chassez m, par les règles données (167), & cherchez les diviseurs commensurables de l'équation en n. Vous aurez la valeur de n, par le moyen de laquelle & de la valeur de m en n que vous aurez en éliminant, vous déterminerez m, & par conséquent le facteur $x^2 + mx + n$.

On voit par-là comment on doit s'y prendre pour trouver les facteurs commensurables des 3e., 4e., &c. degrés.

De l'Extraction des racines des quantités en partie commensurables, & en partie incommensurables.

224. Les équations qui se résolvent à la manière de celles du second degré (173), conduisent à des expressions de cette

forme $\sqrt{(7+\sqrt{48})}$, ou $\sqrt[3]{(26+15\sqrt{3})}$, ou &c. Ces quantités peuvent ſouvent être ramenées à ne renfermer que des quantités rationnelles & de ſimples radicaux quarrés ; ou ſeulement des radicaux quarrés ; ou encore, des radicaux quarrés, multipliés ou diviſés par un radical ſimple de même degré que le radical ſupérieur. Voyons comment on doit s'y prendre pour les quantités de la forme $\sqrt{(C+\sqrt{D})}$.

Je repréſente cette quantité par $\sqrt{m}+\sqrt{n}$, m & n étant deux inconnues. J'aurai donc $\sqrt{(C+\sqrt{D})}=\sqrt{m}+\sqrt{n}$; en quarrant, il vient $C+\sqrt{D}=m+2\sqrt{mn}+n$. Comme j'ai deux inconnues & une ſeule équation, je ſuis maître de déterminer l'une de ces inconnues par telle condition que je voudrai ; je puis donc ſuppoſer $2\sqrt{mn}=\sqrt{D}$, & alors l'équation ſe réduit à $C=m+n$; je quarre la première de ces deux-ci, & la ſeconde ; j'ai $4mn=D$ & $m^2+2mn+n^2=C^2$; je retranche la première de ces deux équations-ci, de la ſeconde, & j'ai $m^2-2mn+n^2=C^2-D$; d'ou l'on voit que pour que m & n ſoient commenſurables, il faut que la valeur de C^2-D ſoit un quarré, puiſque $m^2-2mn+n^2$ eſt un quarré. Tirant donc la racine quarrée, on aura $m-n=\sqrt{(C^2-D)}$; or nous avions, ci-deſſus, $m+n=C$; ajoutant & retranchant ces deux équations, & diviſant par 2, on aura $m=\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}\sqrt{(C^2-D)}$, & $n=\frac{1}{2}C-\frac{1}{2}\sqrt{(C^2-D)}$; donc $\sqrt{(C+\sqrt{D})}=\sqrt{[\frac{1}{2}C+\frac{1}{2}\sqrt{(C^2-D)}]}+\sqrt{[\frac{1}{2}C-\frac{1}{2}\sqrt{(C^2-D)}]}$; or quoique chacun des deux termes de ce ſecond membre renferme deux radicaux, cependant chacun n'en aura véritablement qu'un ſeul, lorſque $\sqrt{(C+\sqrt{D})}$ ſera réductible, puiſqu'alors C^2-D ſera un quarré, ainſi que nous venons de le voir.

Prenons pour exemple la quantité $\sqrt{(7+\sqrt{48})}$: ici, $C=7$, $\sqrt{D}=\sqrt{48}$, & par conſéquent $D=48$; donc

$C^2 - D = 49 - 48 = 1$, & $\sqrt{(C^2 - D)} = \sqrt{1} = 1$; on aura donc, en substituant, dans la formule que nous venons de trouver, $\sqrt{(7 + \sqrt{48})} = \sqrt{(\frac{7}{2} + \frac{1}{2})} + \sqrt{(\frac{7}{2} - \frac{1}{2})} = \sqrt{4} + \sqrt{3} = 2 + \sqrt{3}$. Si l'on avoit $\sqrt{(11 + 6\sqrt{2})}$; en faisant passer 6 sous le second radical (112), on auroit $\sqrt{(11 + \sqrt{72})}$, que l'on trouvera de même se réduire à $3 + \sqrt{2}$.

Pour second exemple nous prendrons $\sqrt{(4ac + 2(a+c)(a-c)\sqrt{-1})}$ que nous avons dit ci-dessus (203), valoir $(a+c) + (a-c)\sqrt{-1}$. Si l'on fait passer $2(a+c)(a-c)$ sous le radical $\sqrt{-1}$, la quantité $\sqrt{(4ac + 2(a+c)(a-c)\sqrt{-1})}$, devient $\sqrt{[4ac + \sqrt{(-4.(a+c)^2(a-c)^2}]}$; donc $C = 4ac$, $\sqrt{D} = \sqrt{(-4(a+c)^2(a-c)^2)}$, ou $D = -4(a+c)^2(a-c)^2 = -4a^4 + 8a^2c^2 - 4c^4$; donc $C^2 - D = 16a^2c^2 + 4a^4 - 8a^2c^2 + 4c^4 = 4a^4 + 8a^2c^2 + 4c^4$; donc $\sqrt{(C^2 - D)} = 2(a^2 + c^2)$; donc la formule devient alors $\sqrt{(2ac + a^2 + c^2)} + \sqrt{(2ac - a^2 - c^2)}$, c'est-à-dire, $\sqrt{(a+c)^2} + \sqrt{[(a-c)^2 \times -1]}$, qui se réduit à $(a+c) + (a-c)\sqrt{-1}$.

Si, au lieu de $\sqrt{(C + \sqrt{D})}$, on avoit $\sqrt{(C - D)}$, au lieu de $\sqrt{[\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}(\sqrt{C^2 - D})]} + \sqrt{[\frac{1}{2}C - \frac{1}{2}\sqrt{(C^2 - D)}]}$, on auroit $\sqrt{[\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}\sqrt{(C^2 - D)}]} - \sqrt{[\frac{1}{2}C - \frac{1}{2}\sqrt{(C^2 - D)}]}$.

225. Voyons maintenant les quantités de la forme ... $\sqrt[3]{(C + \sqrt{D})}$. Si l'on peut tirer exactement la racine cubique de la quantité représentée par $C + \sqrt{D}$, cette racine ne peut être qu'une quantité de cette forme $m\sqrt[3]{k} + \sqrt[3]{k}.\sqrt{n}$; car si l'on supposoit qu'elle peut renfermer deux radicaux quarrés, le cube en renfermeroit deux aussi, ainsi qu'on peut le voir en cubant $\sqrt{g} + \sqrt{h}$. Mais on voit, par le même moyen, qu'elle peut renfermer un radical cube, tel que $\sqrt[3]{k}$. Cela

posé, faisons donc $\sqrt[3]{(C+\sqrt{D})}=m\sqrt[3]{k}+\sqrt[3]{k}.\sqrt{n}$; nous aurons, en cubant, $C+\sqrt{D}=m^3 k+3m^2 k\sqrt{n}+3mkn+kn\sqrt{n}=m^3 k+3mkn+(3m^2 k+kn)\sqrt{n}$; égalant donc la partie irrationnelle, à la partie irrationnelle, nous aurons $\sqrt{D}=(3m^2 k+kn)\sqrt{n}$, & $C=m^3 k+3mkn$; quarrant la première équation & la seconde, on aura... $D=9m^4 k^2 n+6m^2 k^2 n^2+k^2 n^3$, & $C^2=m^6 k^2+6m^4 k^2 n+9m^2 k^2 n^2$; retranchant la première de ces deux équations, de la seconde, on a $C^2-D=m^6 k^2-3m^4 k^2 n+3m^2 k^2 n^2-k^2 n^3$, ou multipliant tout par k, $C^2 k-Dk=m^6 k^3-3m^4 k^3 n+3m^2 k^3 n^2-k^3 n^3$; tirant la racine cubique, il vient $m^2 k-nk=\sqrt[3]{(C^2 k-Dk)}$; & par conséquent $m^2-n=\frac{\sqrt[3]{[(C^2-D)k]}}{k}$; donc pour que m^2-n soit rationnel, & par conséquent, pour que $C+\sqrt{D}$ ait une racine cubique, il faut que $(C^2-D)k$ soit un cube exact, ce que l'on peut toujours obtenir en prenant pour k un nombre convenable; car k est absolument arbitraire, ensorte que si C^2-D est un cube parfait, on fera $k=1$. Faisons donc, pour abréger, $\frac{\sqrt[3]{[(C^2-D)k]}}{k}=p$; nous aurons $m^2-n=p$, & par conséquent $n=m^2-p$; substituant cette valeur dans l'équation $C=m^3 k+3mkn$, il viendra, après les réductions faites, $4km^3-3pkm-C=0$. Afin donc que m & n soient rationnels, il faut que la valeur de m tirée de cette dernière équation, soit rationnelle; il faudra donc chercher les diviseurs commensurables de cette équation (220), qui ne peut manquer d'en avoir, si m & n peuvent être rationnels, c'est-à-dire, si la quantité proposée est susceptible d'une racine cubique de la forme $m\sqrt[3]{k}+\sqrt[3]{k}.\sqrt{n}$.

Prenons, pour exemple, la quantité $\sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})}$;

nous avons donc ici $C = 20$, $\sqrt{D} = 14\sqrt{2}$, & par conséquent $C^2 = 400$ & $D = 392$, donc $C^2 - D = 8$; c'est-à-dire, un cube: je puis donc faire $k = 1$. Cela posé, j'aurai donc $\frac{\sqrt[3]{[(C^2-D)k]}}{k} = \frac{\sqrt[3]{8 \times 1}}{1} = \sqrt[3]{8} = 2$, & par conséquent aussi $p = 2$. L'équation $4km^3 - 3pkm - C = 0$, deviendra donc $4m^3 - 6m - 20 = 0$, ou en divisant par 2, $2m^3 - 3m - 10 = 0$; je fais, maintenant, $m = \frac{y}{2}$ pour faire disparoître (191) le coëfficient du premier terme, & j'ai, toute réduction faite, $y^3 - 6y - 40 = 0$, qui (220) a pour diviseur commensurable $y - 4$; donc $y = 4$, & par conséquent $m = 2$; or l'équation $n = m^2 - p$, donne $n = 4 - 2 = 2$; donc $\sqrt[3]{(20 + 14\sqrt{2})} = 2 + \sqrt{2}$.

Prenons pour second exemple, la quantité $\sqrt[3]{(52 + 30\sqrt{3})}$. Ici nous avons $C = 52$, $\sqrt{D} = 30\sqrt{3}$; par conséquent $CC = 2704$, $D = 2700$; donc $CC - D = 4$; donc pour que $(CC - D)k$ devienne un cube, il faut supposer $k = 2$; & alors $\frac{\sqrt[3]{[(CC-D)k]}}{k}$ ou p, devient $\frac{\sqrt[3]{8}}{2} = \frac{2}{2} = 1$; l'équation $4km^3 - 3pkm - C = 0$ devient donc $8m^3 - 6m - 52 = 0$; faisant $2m = y$, on a $y^3 - 3y - 52 = 0$, qui a pour diviseur commensurable $y - 4$; donc $y = 4$, & par conséquent $m = 2$; d'ailleurs l'équation $n = m^2 - p$, donne $n = 4 - 1 = 3$. Ayant donc $m = 2$, $n = 3$, $k = 2$, on aura $\sqrt[3]{(52 + 30\sqrt{3})} = 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2}.\sqrt{3}$.

On voit à présent comment on doit se conduire pour les quantités plus élevées.

De la manière d'approcher des racines des Équations composées.

226. La méthode que nous allons expofer pour approcher de la valeur de l'inconnue dans les équations, fuppofe qu'on ait déjà une valeur de cette racine, approchée feulement jufqu'à fa dixième partie près. Voyons donc comment on peut fe procurer cette première valeur. Prenons pour exemple, l'équation $x^3 - 5x + 6 = 0$.

Je fubftitue dans cette équation, au lieu de x, plufieurs nombres, tant pofitifs que négatifs, jufqu'à ce que deux fubftitutions confécutives me donnent deux réfultats de fignes contraires. Lorfque j'en ai rencontré deux de cette qualité, je conclus que la valeur de x eft entre les deux nombres qui, fubftitués au lieu de x, ont donné ces deux réfultats, enforte que fi ces deux nombres ne diffèrent l'un de l'autre que de la dixième partie, ou moins de la dixième partie de l'un d'entre eux, j'ai la valeur approchée que je cherche, en prenant l'un ou l'autre, ou un milieu entre eux.

Mais s'ils diffèrent davantage, alors j'opère comme on va le voir.

Je fubftitue dans l'équation $x^3 - 5x + 6 = 0$ les nombres 0, 1, 2, 3, 4, &c.; mais je m'apperçois bientôt qu'ils donnent tous des réfultats pofitifs, & que cela iroit toujours de même à l'infini. C'eft pourquoi je fubftitue les nombres 0 − 1, − 2, − 3, &c., ce qui me donne les réfultats fuivans:

Subftitutions.	*Réfultats.*
0	+ 6
− 1	+ 10
− 2	+ 8
− 3	− 6

Je m'arrête donc à ces deux derniers, & je conclus que l'une des racines est entre -2 & -3. Mais comme ces nombres diffèrent de 1, qui est plus grand que la dixième partie de chacun, je prends un milieu entre les deux nombres, c'est-à-dire, que je prends la moitié $-2,5$ de leur somme -5. Je substitue $-2,5$ au lieu de x dans l'équation, & je trouve pour résultat $+2.875$, c'est-à-dire, une quantité positive; je conclus donc que la racine est entre $-2,5$ & -3.

Je prends un milieu entre $-2,5$ & -3; c'est $-2,7$, en négligeant au-delà des dixièmes.

Je substitue $-2,7$ dans l'équation, au lieu de x; je trouve pour résultat $-0,183$, c'est-à-dire, une quantité négative. Donc puisque $-2,5$, a donné un résultat positif, & que $-2,7$ en donne un négatif, la valeur de x, est entre $-2,5$ & $-2,7$; or ces deux nombres ne diffèrent que de 0,2 qui est plus petit que le dixième de chacun d'eux; donc la valeur de x est (en prenant un milieu entre deux) $-2,6$ à moins d'un dixième près.

Ayant ainsi trouvé un nombre qui ne diffère pas de x, d'un dixième de la valeur de cette même quantité, je suppose x égal à ce nombre plus une nouvelle inconnue z; c'est-à-dire, ici, je suppose $x = -2,6 + z$, & je substitue cette quantité, au lieu de x, dans l'équation; mais comme z est tout au plus un dixième de la quantité 2,6; que par conséquent son quarré sera tout au plus la centième partie du quarré de celui-ci; son cube tout au plus la millième partie du cube de celui-ci; & ainsi de suite, je néglige dans cette substitution toutes les puissances de z au-dessus de la première; & afin de ne pas faire de calculs inutiles, je n'admets dans la formation du cube de $-2,6 + z$ (& des autres puissances s'il y en avoit), que les deux premiers termes que doit donner la règle donnée (149).

Pour substituer avec ordre, j'écris comme on le voit ici:

$$x^3 = (-2,6+z)^3 = (-2,6)^3 + 3(-2,6)^2 \cdot z$$
$$-5x = -5(-2,6+z) = -5(-2,6) - 5z$$
$$+6 = +6$$

Réunissant donc, j'aurai pour le résultat de la substitution $(-2,6)^3 + 3(-2,6)^2 \cdot z - 5 \cdot (-2,6) - 5z + 6 = 0$, ou, en faisant les opérations indiquées, & les réductions, $15,28z + 1,424 = 0$; d'où je tire $z = -\frac{1,424}{15,28}$, qui en réduisant en décimales, donne $z = -0,09$; quantité dans laquelle je ne pousse la division que jusqu'à un chiffre significatif seulement. En général, il ne faut la pousser que jusqu'à autant de chiffres significatifs (y compris le premier qu'on trouve), qu'il y a de places entre celui-ci, & le premier chiffre de la première valeur approchée de x : ici entre 9 (qui est le premier chiffre significatif du quotient 0,09) & 2 (qui est le premier chiffre de 2,6) première valeur approchée de x, il n'y a qu'une place; c'est pourquoi je m'arrête au premier chiffre significatif 9.

La valeur de x, savoir $x = -2,6 + z$, devient donc $x = -2,6 - 0,09$, c'est-à-dire, $x = -2,69$.

Pour avoir cette valeur de x plus exactement, je suppose actuellement $x = -2,69 + t$;

J'aurai donc $x^3 = (-2,69)^3 + 3(-2,69)^2 \cdot t$
$$-5x = -5(-2,69) - 5t$$
$$+6 = +6$$

Et par conséquent, après les opérations faites, $-0,015109 + 16,7083t = 0$, d'où je tire $t = \frac{0,015109}{16,7083}$, qui revient à $t = 0,000904$.

La valeur de x, savoir $x = - 2{,}69 + t$, devient donc $x = - 2{,}69 + 0{,}000904 = - 2{,}689096$.

Si l'on veut pousser plus loin, on fera $x = - 2{,}689096 + u$, & on se conduira de la même manière.

Prenons, pour second exemple, l'équation. . . . .

$$x^4 - 4x^3 - 3x + 27 = 0.$$

En s'y prenant comme ci-dessus, on trouvera que la valeur de x approchée à moins d'un dixième près, est 2,3.

Je fais donc $x = 2{,}3 + z$. J'aurai, en substituant, & négligeant z^2, z^3, &c.

$$\begin{aligned} x^4 &= (2{,}3)^4 + 4\,(2{,}3)^3 \cdot z \\ - 4x^3 &= - 4\,(2{,}3)^3 - 12\,(2{,}3)^2\, z \\ - 3x &= - 3\,(2{,}3) - 3z \\ + 27 &= + 27 \end{aligned}$$

Donc, toute réduction faite, $- 0{,}5839 - 17{,}812z = 0$, & par conséquent $z = - \frac{0{,}5839}{17{,}812} = - 0{,}03$; je me borne aux centièmes, par la même raison que ci-dessus. La valeur de x est donc $x = 2{,}3 - 0{,}03 = 2{,}27$.

Pour approcher davantage, je fais $x = 2{,}27 + t$, & substituant, j'aurai. . . . .

$$\begin{aligned} x^4 &= (2{,}27)^4 + 4\,(2{,}27)^3\, t \\ - 4x^3 &= - 4\,(2{,}27)^3 - 12\,(2{,}27)^2\, t \\ - 3x &= - 3\,(2{,}27) - 3t \\ + 27 &= + 27 \end{aligned}$$

Donc, toute réduction faite, $- 0{,}04595359 - 18{,}046468t = 0$; d'où l'on tire $t = - \frac{0{,}04595359}{18{,}046468} = - 0{,}0025$, & par conséquent $x = 2{,}2675$.

Réflexions sur la Méthode précédente.

227. La méthode que nous venons d'expoſer, & qui eſt dûe à *Newton*, exige, comme on vient de le voir, que l'on trouve deux nombres qui ſubſtitués dans l'équation, donnent deux réſultats dont l'un ſoit poſitif & l'autre négatif. Nous avons dit qu'il y auroit toujours une racine de l'équation qui ſeroit compriſe entre les deux nombres qui ont donné ces deux réſultats; & cela eſt facile à voir. Car ſi l'on ſuppoſe que la plus petite valeur de x ſoit repréſentée par a, & que celle qui eſt immédiatement plus grande, ſoit b, enſorte que $x - a$ & $x - b$ ſoient deux facteurs de l'équation, il eſt viſible que ſi au lieu de x on ſubſtitue un nombre poſitif plus petit que a, $x - a$ devient négatif. Et ſi l'on ſubſtitue un nombre poſitif plus grand que a, mais plus petit que b, $x - a$ deviendra poſitif; & le produit des autres facteurs ſera de même ſigne que dans le premier cas; donc puiſqu'il n'y a que le facteur $x - a$ qui change de ſigne alors, le produit total changera ſûrement de ſigne. On démontreroit la même choſe, ſi le plus petit facteur, au lieu d'être $x - a$, étoit $x + a$, mais en ſubſtituant des nombres négatifs.

Mais ne peut-il pas arriver qu'il n'y ait aucune valeur réelle, ſoit poſitive, ſoit négative, qui ſubſtituée pour x, donne deux réſultats de ſigne contraire?

Cela peut arriver dans trois cas; 1°. lorſque les racines ſont égales deux à deux, quatre à quatre, &c.

2°. Lorſque toutes les racines ſont imaginaires.

3°. Lorſqu'elles ſont en partie imaginaires & en partie égales deux à deux.

Par exemple, une équation qui feroit formée de ces quatre facteurs $x - a$, $x - a$, $x - b$, $x - b$, c'eft-à-dire, l'équation $(x - a)^2 \times (x - b)^2 = 0$, ne change jamais de figne, quelque valeur qu'on mette pour x, foit positive, foit négative. En effet, foit que $x - a$ foit pofitif, foit qu'il foit négatif, fon quarré eft toujours pofitif. Il en eft de même de $x - b$.

Quant au cas où toutes les racines font imaginaires, il eft évident qu'il n'y a aucuns nombres réels à fubftituer pour x qui puiffent donner deux réfultats de figne contraire; car fi cela arrivoit, la valeur de x feroit donc entre ces deux nombres réels; elle feroit donc réelle; ce qui eft contre la fuppofition.

Enfin le troifième cas fuit immédiatement des deux que nous venons d'examiner.

Que doit-on donc faire alors, pour avoir les racines? C'eft ce que nous allons examiner.

De la manière d'avoir les Racines égales des Équations.

228. Pour avoir les racines égales qu'une équation peut renfermer, *multipliez chaque terme par l'expofant de* x *dans ce même terme, & diminuez cet expofant, d'une unité; vous aurez une nouvelle équation. Cherchez le plus grand commun divifeur entre cette dernière, & l'équation propofée, il fera compofé des racines égales de celle-ci, mais élevées à une puiffance moindre d'une unité.*

Par exemple, l'équation . . . .

$$\begin{aligned} x^4 - 2ax^3 + a^2x^2 - 2a^2bx + a^2b^2 = 0 \\ - 2bx^3 + 4abx^2 - 2ab^2x \\ + b^2x^2 \end{aligned}$$

eft le produit de $(x - a)^2$ par $(x - b)^2$.

Si vous multipliez chaque terme par l'exposant de x, & si vous diminuez l'exposant, d'une unité, vous aurez, en faisant attention que l'exposant de x dans le dernier terme, est zéro. . . . .

$$\begin{array}{llll} 4x^3 & -6ax^2 & +2a^2x & -2a^2b = 0, \\ & -6bx^2 & +8abx & -2ab^2 \\ & & +2b^2x & \end{array}$$ équation dont

le diviseur commun avec l'équation proposée, est $x^2 \begin{array}{l} -ax \\ -bx \end{array} + ab$,

qui n'est autre chose que $(x - a)(x - b)$ dans lequel on voit les mêmes facteurs que dans $(x - a)^2 \times (x - b)^2$, avec cette différence seulement que dans ce commun diviseur, ils y sont à une puissance moindre d'une unité. Voici la démonstration de cette règle.

Nous avons vu (149) que . . . .

$$(x + b)^m = x^m + m \,.\, x^{m-1}b + m \,.\, \frac{m-1}{2} \,.\, x^{m-2}b^2$$
$$+ m \,.\, \frac{m-1}{2} \,.\, \frac{m-2}{3}\, x^{m-3}b^3$$

Concevons que dans le second membre, on multiplie chaque terme par l'exposant de x, & qu'on diminue cet exposant d'une unité, on aura. . . . .

$$mx^{m-1} + m \,.\, \overline{m-1}\, x^{m-2}b + m \,.\, \frac{m-1}{2} \,.\, \overline{m-2} \,.$$
$$x^{m-3}b^2 + m \,.\, \frac{m-1}{2} \,.\, \frac{m-2}{3} \,.\, \overline{m-3} \,.\, x^{m-4}b^3, \text{ \&c.}$$

Or cette quantité n'est autre chose que. . . . .

$$m\,(x^{m-1} + \overline{m-1}\, x^{m-2}b + \overline{m-1} \,.\, \frac{m-2}{2}\, x^{m-3}b^2$$
$$+ \overline{m-1} \,.\, \frac{m-2}{2} \,.\, \frac{m-3}{3}\, x^{m-4}b^3, \text{ \&c.}$$

c'est-à-dire (149), qu'elle est précisément $m\,(x + b)^{m-1}$.

Concluons donc que lorſqu'on multiplie les termes qui compoſent la puiſſance m du binome $x + b$, chacun par l'expoſant de x, dans ce terme, ce produit eſt préciſément la puiſſance immédiatement inférieure, multipliée par l'expoſant de la puiſſance actuelle. La règle eſt donc démontrée pour le cas où toutes les racines ſont égales.

Suppoſons actuellement que l'on ait $(x + b)^m \times (x + d)^n$, en développant de même $(x + b)^m$ & $(x + d)^n$, & multipliant les deux réſultats l'un par l'autre ; ſi vous multipliez enſuite chaque terme, par l'expoſant de x, vous trouverez de même par le calcul, que le réſultat n'eſt autre choſe que $m(x + b)^{m-1} \times (x + d)^n + n(x + b)^m \times (x + d)^{n-1}$, dont le commun diviſeur avec $(x + b)^m \times (x + d)^n$ eſt $(x + b)^{m-1} \times (x + d)^{n-1}$ & ainſi de ſuite, quel que ſoit le nombre des facteurs $x + b$, $x + d$, &c.

De la manière d'avoir les Racines imaginaires des Équations.

229. Quoique les racines imaginaires des équations ſoient ſuſceptibles de bien des formes différentes, ſelon le degré de l'équation, néanmoins on peut les ramener toutes à cette forme, $x = a + b\sqrt{-1}$, a & b étant de quantités réelles poſitives ou négatives. La démonſtration rigoureuſe de cette propoſition, nous mèneroit trop loin : on la trouvera dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin*, *année* 1746, où M. Dalembert, Auteur de cette démonſtration, fait voir qu'en même temps qu'une des valeurs de x peut être repréſentée par $a + b\sqrt{-1}$, il y en a une autre qui doit être exprimée par $a - b\sqrt{-1}$; d'où il ſuit, 1°. qu'il n'y a

que les équations de degrés pairs qui puiſſent avoir toutes leurs racines imaginaires.

2°. Qu'une équation qui a toutes ſes racines imaginaires, eſt décompoſable en facteurs du ſecond degré de cette forme $(x - a - b\sqrt{-1}) \times (x - a + b\sqrt{-1})$, c'eſt-à-dire, en facteurs réels du ſecond degré; puiſqu'en faiſant la multiplication, on a $x^2 - 2ax + aa + bb$; quantité où il n'y a plus d'imaginaires.

Donc, lorſqu'une équation a toutes ſes racines imaginaires, ſi l'on cherche à la décompoſer en facteurs du ſecond degré tels que $x^2 + gx + h$ [ce que l'on fera de la manière qui a été indiquée (223)], l'équation en h aura ſûrement quelques racines réelles; donc on pourra toujours avoir ces racines, au moins par approximation. Donc dans quelque équation que ce ſoit, on peut toujours avoir les racines, ſoit réelles, ſoit imaginaires, au moins par approximation.



SECONDE SECTION,

DANS laquelle on applique l'Algèbre à l'Arithmétique & à la Géométrie.

230. DANS le petit nombre d'applications que nous avons données dans le Section précédente, on a dû remarquer que lorsqu'une fois une question a été mise en équation, ce qui reste à faire pour parvenir à la résolution, est uniforme pour toutes les questions du même degré. Tout se réduit à dégager l'inconnue ou les inconnues; & cela se fait par des règles qui sont toujours les mêmes, quelque différentes que puissent être d'ailleurs les quantités que l'on a à considérer dans chaque question, & quelque différentes que soient elles-mêmes ces questions, pourvu qu'elles soient du même degré.

Ces règles dispensent de beaucoup de raisonnemens qu'on auroit à faire si l'on vouloit se passer du secours des équations; raisonnemens qui, indépendamment de leur nombre, seroient encore souvent par leur nature, au-dessus des efforts ordinaires de l'esprit.

Nous avons fait pressentir aussi, par quelques exemples,

exemples, combien il étoit avantageux de représenter par des signes généraux, chacune des quantités qui entrent dans une question, ainsi que les opérations que l'on a à faire sur elles; mais indépendamment des avantages que nous avons vu devoir résulter de cette méthode, il en est encore un grand nombre d'autres que nous allons faire connoître en présentant les équations sous un point de vue plus étendu que nous ne l'avons fait jusqu'ici.

Lorsque l'on a représenté d'une manière générale chacune des quantités, soit connues, soit inconnues qui entrent dans une question, & que l'on a exprimé, par des équations, toutes les conditions qu'elle renferme, on peut alors abandonner totalement de vue la question, pour s'occuper uniquement de ces équations & de l'application des règles qui leur conviennent. Alors si l'on a bien présent à l'esprit ce que l'on est convenu d'entendre, soit par les signes, soit par la disposition des lettres, chaque équation devient, comme un livre, où l'on peut lire, avec plus de facilité, les différens rapports qui lient les quantités les unes aux autres. On peut, par différentes applications des règles exposées dans la première Section, donner à ces équations de nouvelles formes qui rendent encore ces rapports plus faciles à saisir. En un mot, on peut les considérer comme

le dépôt des propriétés de ces quantités, & des ſolutions générales d'un grand nombre de queſtions qu'on n'avoit point en vue, qu'on ne ſoupçonnoit pas même tenir de ſi près à la queſtion principale.

En effet, puiſque les règles qui ſervent à trouver les valeurs des inconnues, ont toutes pour objet de ramener chaque quantité inconnue à former ſeule le premier membre d'une équation dont le ſecond ſeroit compoſé de toutes les autres quantités, & que ces règles ſont évidemment applicables à chacune des quantités qui entrent dans ces équations, il eſt viſible qu'on peut toujours, par ces mêmes règles, parvenir à avoir ſeule dans un membre, l'une quelconque des quantités qui entrent dans une équation, & n'avoir que les autres dans le ſecond membre. Alors on eſt dans le même cas que ſi l'on avoit eu à réſoudre la queſtion où toutes ces dernières ſeroient connues, & celle-là, ſeule, inconnue. On voit donc qu'une même équation réſout autant de queſtions différentes qu'elle renferme de quantités différentes. Rendons cela ſenſible, par des exemples.

Propriétés générales des progreſſions arithmétiques.

231. Nous avons vu (*Arith.* 206), qu'un terme quelconque d'une progreſſion arithmétique croiſſante

étoit composé du premier, plus autant de fois la différence commune, qu'il y a de termes avant celui que l'on considère.

Si donc on représente par a la valeur numérique du premier terme ; par u celle du terme dont il s'agit ; par d, la différence commune, ou la raison de la progression ; & enfin par n, le nombre total des termes ; alors le nombre des termes qui précèdent le terme u, sera exprimé par $n - 1$; & la proposition que nous venons de citer pourra se traduire en langage algébrique, par cette équation ; $u = a + (n - 1) d$, qui résout la question où connoissant la raison d d'une progression, le nombre n des termes, & la valeur a du premier, on demanderoit quelle doit être la valeur du dernier u.

Mais puisqu'il entre quatre quantités dans cette équation, je dis qu'elle résout quatre questions générales. En effet,

1°. Si l'on regarde a, comme l'inconnue & que l'on en cherche la valeur, suivant les règles de la première Section, on aura $a = u - (n - 1) d$, qui nous apprend que le premier terme d'une progression arithmétique croissante se trouve en retranchant du dernier u, la différence d prise $n - 1$ de fois, c'est-à-dire, la différence prise autant de fois moins une qu'il y a de termes en tout.

2°. Si l'on regarde n comme l'inconnue, l'équation $u = a + (n - 1)d$, qui n'eſt autre choſe que $u = a + nd - d$, donne en tranſpoſant, $nd = u - a + d$, & en diviſant, $n = \frac{u - a + d}{d} = \frac{u - a}{d} + 1$, qui m'apprend que connoiſſant le premier terme a, le dernier u & la raiſon d, d'une progreſſion arithmétique, je ſaurai combien il y a de termes, en retranchant le premier du dernier, diviſant le reſte par la raiſon d, & ajoutant une unité au quotient. Par exemple, ſi je ſais que le premier terme d'une progreſſion eſt 5, le dernier 37, & la différence 2; de 37 je retranche 5, ce qui me donne 32 qui étant diviſé par la différence 2, donne 16 auquel ajoutant 1, j'ai 17 pour le nombre des termes de cette progreſſion.

3°. Enfin, ſi je regarde d comme l'inconnue dans l'équation $u = a + (n - 1)d$, j'aurai, en tranſpoſant, $(n - 1)d = u - a$, & en diviſant par $n - 1$, $d = \frac{u - a}{n - 1}$, qui m'apprend que pour connoître la différence qui doit régner dans une progreſſion arithmétique dont le premier terme, le dernier & le nombre des termes ſont connus, il faut retrancher le premier du dernier, & diviſer le reſte par le nombre des termes moins un. Cette règle revient à celle que nous avons donnée (*Arith.* 209) pour trouver un nombre déterminé de moyennes

proportionnelles entre deux quantités données. Nous avons dit qu'il falloit retrancher la plus petite de la plus grande, & divifer le refte par le nombre des moyens augmenté d'une unité, ce qui eft évidemment la même chofe, puifque le nombre des moyens eft moindre de deux unités que le nombre total des termes de la progreffion.

La feule équation $u = a + (n - 1) d$, nous donne donc la réfolution de quatre queftions générales ; c'eft-à-dire, nous met en état de réfoudre celle-ci qui les comprend toutes quatre : De ces quatre chofes, le premier terme, le dernier, le nombre des termes & la différence d'une progreffion arithmétique, trois quelconques étant connues, trouver la quatrième.

232. Toute autre propriété générale, énoncée auffi d'une manière générale, nous conduira par les mêmes moyens, à la réfolution d'autant de queftions différentes qu'il entrera de quantités dans l'énoncé de cette propriété.

Par exemple, c'eft encore une propriété des progreffions arithmétiques, que *pour avoir la fomme de tous les termes de quelque progreffion arithmétique que ce foit, il faut ajouter le premier terme avec le dernier, & multiplier le réfultat par la moitié du nombre des termes.*

Ainſi, pour avoir la ſomme des cent premiers termes de la progreſſion ÷ 1. 3. 5. 7 &c. dont le centième eſt 199 : au dernier 199 j'ajouterois le premier terme 1, & je multiplierois le réſultat 200, par 50, qui eſt la moitié de 100, nombre des termes, ce qui me donne 10000, pour la ſomme des 100 premiers nombres impairs.

Nous allons démontrer cette propriété, dans un inſtant; mais pour ne point perdre de vue notre objet, ſi en conſervant les mêmes dénominations que ci-devant; nous nommons, de plus, s la ſomme de tous les termes; nous aurons pour la traduction algébrique de cette propriété $s = (a + u) \times \frac{n}{2}$.

Cette équation nous met en état de réſoudre cette queſtion générale qui en comprend quatre. *De ces quatre choſes, le premier terme, le dernier, le nombre des termes, & la ſomme de tous les termes d'une progreſſion arithmétique, trois étant connues, trouver la quatrième.*

En effet, 1°. ſi l'on connoît a, u & n, l'équation donne immédiatement la valeur de s. 2°. Si l'on connoît a, u & s, pour avoir n, on chaſſera le diviſeur 2, & l'on aura $2s = (a + u) \times n$ ou $(a + u) \times n = 2s$; & en diviſant par $a + u$, $n = \frac{2s}{a+u}$ équation où n eſt connue, puiſqu'on ſuppoſe

que l'on connoît les quantités a, u & s qui entrent dans ſa valeur. 3°. & 4°. Si l'on connoît a, s & n, ou u, s & n, & que l'on veuille avoir u ou a, on reprendra l'équation $s = (a + u) \times \frac{n}{2}$; chaſſant la fraction, on a $2s = (a + u) \times n$; diviſant par n, il vient $a + u = \frac{2s}{n}$; d'où l'on tire $u = \frac{2s}{n} - a$, qui ſatisfait à la première queſtion, & $a = \frac{2s}{n} - u$, qui ſatisfait à la ſeconde.

Démontrons maintenant la propriété que nous venons de ſuppoſer.

Il eſt évident que ſi nous continuons de repréſenter le premier terme par a, & la différence par d, nous pouvons repréſenter toute progreſſion arithmétique croiſſante par la ſuivante $\div a . a + d . a + 2d . a + 3d . a + 4d . a + 5d . a + 6d$, &c. Concevons que, ſous cette progreſſion arithmétique, on faſſe répondre terme pour terme, la même progreſſion, mais dans un ordre renverſé, on aura ....

$$\div a . a + d . a + 2d . a + 3d . a + 4d . a + 5d . a + 6d .$$
$$\div a + 6d . a + 5d . a + 4d . a + 3d . a + 2d . a + d . a .$$

Comme ces deux progreſſions ſont égales ; il eſt évident que la ſomme des termes de l'une des deux, eſt la moitié des deux réunies ; or ſi l'on y fait attention, on voit que les deux termes correſpondans ſont

& doivent toujours faire une même ſomme, & que cette ſomme eſt celle du premier & du dernier terme de la première progreſſion, réunis; donc la totalité des deux progreſſions ſe trouvera en ajoutant le premier & le dernier terme de l'une, & prenant ce réſultat autant de fois qu'il y a de termes; donc pour l'une ſeulement de ces deux progreſſions, il faudra ajouter le premier & le dernier, prendre ce réſultat, ſeulement moitié autant de fois qu'il y a de termes, c'eſt-à-dire, le multiplier par la moitié du nombre des termes.

233. Les huit queſtions générales que nous venons de réſoudre, tiennent donc à deux principes ſeulement, ſavoir, celui que nous avons énoncé (231) & celui que nous avons énoncé (232). Et puiſque leur réſolution ſe tire immédiatement des deux équations qui ſont la traduction algébrique de ces deux énoncés, on voit comment, à l'aide de l'Algèbre, on peut faire découler d'une même ſource toutes les vérités qui en dépendent.

Quoique ces propriétés ne ſoient pas toutes également utiles, cependant comme elles ſont ſimples, elles en ſont d'autant plus propres à faire bien ſentir l'uſage des équations. C'eſt pourquoi nous continuerons d'expoſer cet uſage, en les prenant encore pour exemple.

Dans ce que nous venons d'expofer, nous n'avons confidéré qu'une feule équation à la fois. Mais fi deux ou un plus grand nombre d'équations qui expriment des propriétés différentes de quelques quantités, fe trouvent avoir quelques-unes de ces quantités qui leur foient communes, alors on peut encore en dériver un très-grand nombre d'autres propriétés, & cela avec une très-grande facilité. Par exemple, les deux équations fondamentales des progreffions arithmétiques, favoir $u = a + (n - 1) d$ & $s = (a + u) \times \frac{n}{2}$, ont trois quantités communes entre elles, favoir a, u & n. Si l'on prend fucceffivement dans chacune de ces deux équations la valeur de l'une quelconque de ces trois quantités, & fi l'on égale enfuite ces deux valeurs, on aura une nouvelle équation dans laquelle cette quantité ne fera plus, & qui exprimera le rapport que les quatre autres ont entre elles, indépendamment de celle-là. Par exemple, fi je prends dans chaque équation la valeur de a, j'aurai ces deux valeurs $a = u - (n - 1) d$, & $a = \frac{2s}{n} - u$; donc en égalant, j'aurai $u - (n - 1) d = \frac{2s}{n} - u$, équation de laquelle, en confidérant fucceffivement u, n, d & s comme inconnues, je tirerai comme ci-deffus, quatre nouvelles propriétés générales des progreffions arithmétiques. Par exemple, en regardant s comme

inconnue, je tirerai $s = \frac{2nu - n.(n-1)d}{2}$ qui me donne le moyen de connoître la somme d'une progression arithmétique, par le moyen du dernier terme, de la différence, & du nombre des termes, puisqu'il n'entre que ces trois quantités & des nombres connus, dans le second membre.

Si au lieu de chasser ou d'éliminer a, nous eussions éliminé u, ou n, nous aurions eu, de même, pour chaque élimination, une nouvelle équation qui auroit renfermé quatre des cinq quantités a, u, n, d, s: & en considérant successivement chacune de ces quatre quantités, comme inconnues, on tireroit de chaque nouvelle équation quatre nouvelles formules, qui sont autant d'expressions différentes des quantités a, u, n, d, s; expressions dont chacune a son utilité particulière, selon que dans la question qu'on proposera relativement aux progressions arithmétiques, on connoîtra telles ou telles de ces quantités. Par exemple, si l'on me demandoit la somme de tous les termes d'une progression arithmétique, dont on me feroit connoître, le premier, la différence, & le nombre des termes; alors, comme le dernier terme m'est inconnu, j'éliminerois u, & j'aurois une équation qui ne renfermant plus que a, n, d, & s, me feroit aisément connoître s.

Concluons de-là que les deux équations $u = a +$

$(n-1)d$ & $s=(a+u)\times\frac{n}{2}$ donnent la résolution de toutes les questions qu'on peut proposer sur les progressions arithmétiques, lorsqu'on y connoît, immédiatement, trois des cinq quantités a, u, n, d, s.

Donnons ici quelques applications des progressions arithmétiques.

234. Supposons qu'on demande combien la base d'une pile triangulaire de boulets, dont le côté seroit de 6, contiendroit de ces boulets.

Il est facile de voir 1°. que le nombre des boulets de chaque bande parallèle au côté qui porte sur la terre & qui en contient 6, &c. (*fig.* 2), va en diminuant continuellement de 1 & se réduit enfin à 1. 2°. Que le nombre des bandes est 6. Donc il s'agit de trouver la somme des termes d'une progression arithmétique dont le premier est 1, le dernier 6, & le nombre des termes 6. J'ajoute donc le premier 1 avec le dernier 6, & je multiplie le résultat 7, par 3 moitié du nombre des termes, ce qui me donne 21 pour le nombre des boulets de la base de la pile.

235. Nous avons vu, en Géométrie, que pour avoir la surface d'un trapèze, il falloit ajouter les deux côtés parallèles, & multiplier la moitié de leur somme, par la hauteur de ce trapèze. On peut démontrer cette même proposition, par le principe que nous venons de donner pour sommer une progression arithmétique. En effet, on peut se représenter le trapèze *ABDC* (*fig.* 3) comme composé d'un nombre infini de trapèzes infiniment petits tels que *beik*,

cdki. Or il eſt facile de voir qu'en ſuppoſant tous ces petits trapèzes de même hauteur, chacun diffère de ſon voiſin toujours d'une même quantité, ſavoir, du petit parallélogramme *cefg*, en tirant *ce* & *bf* parallèles à *hk*; car *gfki* eſt égal à *bgih*, & *cde* eſt égal à *bcg*, enſorte que le trapèze *cdki*, a de plus que le trapèze *bcih*, le petit parallélogramme *cefg*, qui ſera toujours de même grandeur, tant qu'on ſuppoſera ces trapèzes de même hauteur. Cela étant, tous ces trapèzes forment donc une progreſſion arithmétique dont le premier terme eſt le trapèze contigu à *AB*, & le dernier eſt le trapèze contigu à *CD*; donc pour avoir la totalité de ces trapèzes, ou la ſurface du trapèze *ABDC*, il faut prendre les deux petits trapèzes extrêmes & les multiplier par la moitié du nombre de tous les trapèzes; mais comme on les ſuppoſe infiniment petits, on peut prendre à la place des deux trapèzes extrêmes, les deux lignes *AB* & *CD*; & pour le nombre des trapèzes, on peut prendre la hauteur *IH*; il faut donc multiplier la ſomme des deux lignes *AB* & *CD*, par la moitié de la hauteur *IH*, ou la moitié de la ſomme des deux lignes *AB* & *CD*, par la hauteur *IH*. D'où l'on voit que ſi *AB* eſt zéro, auquel cas le trapèze dégénère en triangle, il faudra multiplier la baſe de ce triangle, par la moitié de ſa hauteur, ce qui s'accorde parfaitement avec ce que nous avons démontré en Géométrie.

De la ſommation des puiſſances des termes d'une progreſſion Arithmétique quelconque.

236. On vient de voir que le principe de la ſommation des termes d'une progreſſion arithmétique peut avoir quelques applications en Géométrie. Il en a

encore dans plusieurs autres rencontres. Il est, par exemple, la base de la sommation des quarrés, des cubes, &c. des termes d'une progression arithmétique; & la sommation de ces puissances a aussi son utilité. Nous allons nous en occuper un moment. Mais auparavant, il est à propos de faire observer que quand on se propose de sommer une suite de quantités qui croissent ou qui décroissent suivant une loi connue, l'objet est de déterminer la somme de ces quantités par la connnoissance de quelques-unes d'entre elles, de leur nombre, & de la quantité qui marque la loi de leur augmentation ou de leur diminution.

Pour résoudre cette question, on peut toujours, comme pour toute autre, faire usage du principe que nous avons donné (67). Mais comme ce principe suppose que si l'on connoissoit la quantité cherchée, on seroit en état de la vérifier, ce qui ne peut se faire sans connoître au moins quelques-unes de ses propriétés, essayons donc de trouver les propriétés des suites des quarrés, des cubes, &c., des nombres en progression arithmétique.

Soient donc a, b, c, d, &c. plusieurs nombres en progression arithmétique dont la difference soit r. On aura 1°. $b = a + r$, $c = b + r$, $d = c + r$; $e = d + r$.

2°. En quarrant, on aura

$$b^2 = a^2 + 2\,ar + r^2,$$
$$c^2 = b^2 + 2\,br + r^2,$$
$$d^2 = c^2 + 2\,cr + r^2,$$
$$e^2 = d^2 + 2\,dr + r^2.$$

3°. En cubant, on aura

$$b^3 = a^3 + 3\,a^2r + 3\,ar^2 + r^3,$$
$$c^3 = b^3 + 3\,b^2r + 3\,br^2 + r^3,$$
$$d^3 = c^3 + 3\,c^2r + 3\,cr^2 + r^3,$$
$$e^3 = d^3 + 3\,d^2r + 3\,dr^2 + r^3.$$

Si l'on ajoute, maintenant, les équations des quarrés, entre elles; & celles des cubes aussi entre elles, on aura, après avoir effacé les termes égaux & semblables qui se trouveront dans différens membres. 1°. $e^2 = a^2 + 2ar + 2br + 2cr + 2dr + 4r^2$ ou $e^2 = a^2 + 2r(a + b + c + d) + 4r^2$; & l'on voit qu'en général si le nombre des quantités a, b, c, d, &c. étoit marqué par n, que la dernière fût marquée par u, & la somme de toutes ces mêmes quantités, par s', on auroit $u^2 = a^2 + 2r(s' - u) + (n-1)r^2$, car $2r$ est multiplié par toutes les quantités a, b, c, &c. excepté la dernière, & r^2 est ajouté à lui-même autant de fois qu'il y a d'équations, c'est-à-dire, autant de fois moins une qu'il y a de quantités a, b, c, &c. Or cette équation renfermant s', il-est aisé d'en tirer la valeur de

cette quantité, & par conféquent, l'expreffion de la fomme de tous les termes d'une progreffion arithmétique. Cette valeur de s' eft $s' = \frac{u^2 - a^2 - (n-1)r^2}{2r} + u$.

2°. Si l'on ajoute de même les équations des cubes, on aura, après avoir effacé les quantités femblables & égales qui fe trouveront dans différens membres $e^3 = a^3 + 3a^2r + 3b^2r + 3c^2r + 3d^2r + 3ar^2 + 3br^2 + 3cr^2 + 3dr^2 + 4r^3$.

C'eft-à-dire, $e^3 = a^3 + 3r(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 3r^2(a + b + c + d) + 4r^3$, où l'on voit que la quantité qui multiplie $3r$, eft la fomme de tous les quarrés excepté le dernier; que la quantité qui multiplie $3r^2$, eft la fomme de toutes les quantités excepté la dernière, & qu'enfin le cube r^3 a été ajouté à lui-même autant de fois qu'il y avoit d'équations, c'eft-à-dire, autant de fois moins une qu'il y a de quantités; par conféquent, en général, & en nommant s'', la fomme des quarrés, u le dernier terme, on aura $u^3 = a^3 + 3r(s'' - u^2) + 3r^2(s' - u) + (n-1)r^3$.

Donc, connoiffant le premier terme, le dernier, la différence r & le nombre des termes, on pourra avoir, par le moyen de cette équation, la valeur de s'', c'eft-à-dire, de la fomme des quarrés; car la quantité s' a été déterminée ci-deffus. Si donc on

substitue pour s', sa valeur, on aura $u^3 = a^3 + 3r(s'' - u^2) + 3r\left(\frac{u^2 - a^2 - (n-1).r^2}{2}\right) + (n-1).r^3$, ou $2u^3 = 2a^3 + 6rs'' - 6ru^2 + 3ru^2 - 3ra^2 - 3.(n-1).r^3 + 2.(n-1).r^3$, qui, après les opérations ordinaires, donne . . . . $s'' = \frac{2u^3 - 2a^3 + 3ru^2 + 3ra^2 + (n-1).r^3}{6r}$.

Si l'on prend de même les quatrièmes puissances des équations $b = a + r$, $c = b + r$ &c., qu'on les ajoute & qu'on les traite de la même manière, on trouvera de même la somme des cubes. On s'y prendra de même pour trouver la somme des puissances plus élevées.

237. Donnons maintenant quelques applications de la somme des quarrés.

Si l'on suppose que la progression arithmétique dont il s'agit, soit la suite naturelle des nombres, à commencer par l'unité, c'est-à-dire, soit 1, 2, 3, &c.

Alors on aura $a = 1$, $r = 1$ & $u = n$; car, en général, u est $= a + \overline{n-1}.r$, qui devient ici $u = 1 + n - 1 = n$. La valeur de s'' deviendra donc $s'' = \frac{2n^3 - 2 + 3n^2 + 3 + n - 1}{6}$, c'est-à-dire, $s'' = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = n\frac{(2n^2 + 3n + 1)}{6} = n.\frac{(n+1).(2n+1)}{6}$.

Supposons

Supposons maintenant qu'on veuille savoir, combien il y a de boulets dans une pile quarrée dont on connoît le nombre des boulets d'un des côtés de la base. Il est évident que cette pile est composée de rangs parallèles à la base, qui sont tous des quarrés dont le côté va continuellement en diminuant de 1 à compter de la base, ou en augmentant de 1 à compter du sommet. La totalité est donc la somme des quarrés de la suite naturelle des nombres, prise jusqu'au nombre n qui marque le nombre des boulets d'un des côtés de la base; cette totalité est donc exprimée par $\frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$; c'est-à-dire, que pour l'avoir, il faut suivre cette règle. . . . .

Au nombre des boulets d'un des côtés de la base & à son double, ajoutez un; multipliez les deux résultats l'un par l'autre, & leur produit par le nombre même des boulets; & prenez le sixième de ce dernier produit. Par exemple, si la pile quadrangulaire a 6 boulets de côté; à 6 & à son double 12, j'ajoute 1, ce qui me donne 7 & 13, qui multipliés l'un par l'autre font 91; je multiplie celui-ci par 6, ce qui fait 546, dont le sixième 91 est le nombre des boulets de la pile.

Lorsque la pile n'a point pour base un quarré, mais un parallélogramme, il faut la concevoir partagée en deux parties (*fig.* 4), dont l'une est la pile quadrangulaire dont nous venons de parler, & dont l'autre est un prisme dont on évaluera la totalité des boulets en multipliant le nombre des boulets contenus dans le triangle FBG par le nombre des boulets de l'arrête BC. Quant au nombre de boulets contenus dans le triangle BGF, on l'aura en multipliant la moitié du nombre des boulets du côté FG par ce nombre augmenté de 1.

238. Nous avons vu en Géométrie, que pour avoir la

solidité d'une pyramide ou d'un cône quelconque, il falloit multiplier la surface de la base, par le tiers de la hauteur. On peut le démontrer aussi par la formule de la somme des quarrés. Mais auparavant, il faut remarquer que si dans la formule $s'' = \frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$, on suppose que le nombre n des termes est infini, cette formule se réduit à $s'' = \frac{n^3}{3}$, ou à cause que $u = n$, ainsi que nous l'avons vu ci-dessus, $s'' = \frac{u^2 n}{3} = u^2 . \frac{n}{3}$. En effet supposer que n est infini, c'est supposer qu'il ne peut plus être augmenté par aucune quantité finie : ainsi pour que le calcul exprime la supposition que l'on fait, que n est infini, il faut nécessairement regarder $n + 1$ & n, comme étant la même chose, & $2n + 1$ & $2n$ comme étant aussi égaux entre eux, alors la formule $s'' = \frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$ se change en $s'' = \frac{n.n.2n}{6} = \frac{2n^3}{6} - \frac{n^3}{3} = n^2 \times \frac{n}{3}$, ou $s'' = u^2 . \frac{n}{3}$, en mettant pour n sa valeur u, dans n^2.

Cela posé, nous avons démontré (*Géom.* 202), qu'en concevant une pyramide comme composée de tranches parallèles à la base, ces tranches étoient entre elles, comme les quarrés de leurs distances St au sommet (*fig.* 5); donc en concevant la hauteur partagée en une infinité de parties égales, les distances suivront la progression naturelle des nombres, & les tranches suivront celle de leurs quarrés; donc la somme des tranches se trouvera de la même manière que celle des quarrés; or la formule $s'' = u^2 . \frac{n}{3}$, fait voir qu'il faut multiplier le dernier des quarrés, par le tiers de leur nombre; il faut donc, pour avoir la somme des

tranches, multiplier la dernière, c'eſt-à dire, la baſe, par le tiers du nombre des tranches, c'eſt-à-dire, par le tiers de la hauteur.

239. Si l'on veut avoir la formule générale pour la ſommation des puiſſances des termes d'une progreſſion arithmétique quelconque, il faut remarquer qu'en général on aura.......

$$e^m = d^m + md^{m-1}r + m.\frac{m-1}{2}d^{m-2}r^2 + m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}d^{m-3}r^3 + \&c.$$

$$d^m = c^m + m\,c^{m-1}\,r + m.\frac{m-1}{2}c^{m-2}r^2 + m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}c^{m-3}r^3 + \&c.$$

$$c^m = b^m + m\,c\,b^{m-1}\,r + m.\frac{m-1}{2}b^{m-2}r^2 + m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}b^{m-3}r^3 + \&c.$$

$$b^m = a^m + m.a^{m-1}\,r + m.\frac{m-1}{2}a^{m-2}r^2 + m.\frac{m-1}{2}\frac{m-2}{3}a^{m-3}r^3 + \&c.$$

& par conſéquent en ajoutant, réduiſant & repréſentant par $\int t^{m-1}$, $\int t^{m-2}$, $\int t^{m-3}$, &c., la ſomme des puiſſances $m-1$, $m-2$, $m-3$, &c., de tous les termes, & par u le dernier terme, on aura en général ....

$$u^m = a^m + mr(\int t^{m-1} - u^{m-1}) + m.\frac{m-1}{2}r^2(\int t^{m-2} - u^{m-2}) + \&c.$$

d'où l'on voit qu'en ſuppoſant ſucceſſivement, $m=1$, $m=2$, $m=3$, $m=4$, &c., on aura les formules de la ſommation de toutes les puiſſances. Car en ſuppoſant $m=1$, on a $u = a + r(\int t^0 - u^0)$; or $\int t^0 = \int 1$, c'eſt-à-dire, la ſomme d'autant d'unités qu'il y a de termes, & $u^0 = 1$. Enſorte qu'au lieu de $\int t^0 - u^0$, on peut prendre $n-1$. En ſuppoſant $m=2$, on a $u^2 = a^2 + 2r(\int t - u) + r^2(\int t^0 - u^0)$, qui donnera $\int t$ puiſqu'on connoît la valeur de $\int t^0$. Suppoſant $m=3$, on aura $u^3 = a^3 + 3r(\int t^2 - u^2) + 3r^2(\int t - u) + r^3(\int t^0 - u^0)$, qui donnera $\int t^2$, puiſqu'on connoît $\int t$ & $\int t^0$. Enfin, ſi l'on ſuppoſe $m=4$, on aura $u^4 = a^4 + 4r(\int t^3 - u^3) + 6r^2(\int t^2 - u^2) + 4r^3(\int t - u) + r^4(\int t^0 - u^0)$ qui donnera $\int t^3$, puiſqu'on connoît $\int t^2$, $\int t$ & $\int t^0$, & ainſi de ſuite à l'infini.

240. Lorſqu'une fois on ſait trouver la ſomme des puiſſances de pluſieurs nombres en progreſſion arithmétique, il eſt fort aiſé de trouver celle d'une infinité d'autres eſpèces de progreſſions. Par exemple, ſi ayant une progreſſion arithmétique, telle que ÷ 3 . 7 . 11 . 15 . 19 &c., on conçoit qu'on ajoute ſucceſſivement les termes, on formera la ſuite 3, 10, 21, 36, 55, &c. que l'on peut ſommer. Et ſi l'on ajoute de même les termes de celle-ci, on aura la ſuite 3, 13, 34, 70, 125, &c. qu'on peut pareillement ſommer; il en ſera de même des termes de celle-ci, ajoutés de la même manière, & ainſi à l'infini.

En effet, la ſomme des termes de la progreſſion arithmétique, eſt $s = (a + u) \times \frac{n}{2}$, ou, en mettant pour u ſa valeur $u = a + r.(n - 1)$, $s = [(2a + r.(n - 1)] \times \frac{n}{2}$. Cette valeur de s exprime donc un terme quelconque de la ſeconde ſuite. Donc pour avoir la ſomme des termes de la ſeconde ſuite, il faut ſommer la ſuite des quantités que donneroit $[(2a + r.(n - 1)] . \frac{n}{2}$ en mettant ſucceſſivement pour n tous les nombres de la progreſſion naturelle 1, 2, 3, &c. Or cette quantité revient à $an + \frac{r}{2} n^2 - \frac{r}{2} n$, dans laquelle a & r reſtant toujours les mêmes, quelque valeur qu'on donne à n, il eſt clair que pour ſommer toutes les quantités repréſentées par an, il ſuffit de ſommer les quantités repréſentées par n, & multiplier cette ſomme par a; or la ſomme des quantités repréſentées par n, eſt la ſomme de la progreſſion arithmétique des nombres naturels. Le raiſonnement eſt le même pour $\frac{r}{2} n$. A l'égard de $\frac{r}{2} n^2$, puiſque r reſte le même, quelque nombre que l'on ſubſtitue pour n, on ſommera donc toutes les quantités repréſentées par n^2,

c'eſt-à-dire, qu'on prendra la ſomme des quarrés des nombres naturels, & on la multipliera par $\frac{r}{2}$. Ainſi pour la ſomme des quantités an, on aura $a.(n+1).\frac{n}{2}$; pour celles des quantités $\frac{r}{2}n$, on aura $\frac{r}{2}.(n+1).\frac{n}{2}$; & pour celles des quantités $\frac{r}{2}n^2$, on aura $\frac{r}{2}.\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$; enſorte que la ſomme des quantités $an+\frac{r}{2}n^2-\frac{r}{2}n$, ou la ſomme des termes de la ſeconde ſuite, ſera $a.(n+1).\frac{n}{2}+\frac{r}{2}.\frac{2n^3+3n^2+n}{6}-\frac{r}{2}.(n+1).\frac{n}{2}$ qui ſe réduit à $a.(n+1).\frac{.n}{2}+r.\frac{(n-1).n.(n+1)}{6}$; & puiſque chaque terme de la troiſième ſuite, eſt la ſomme des termes de la ſeconde, on ſommera cette troiſième en ſommant les différentes parties de ce dernier réſultat, qui n'exigera encore que des ſommations des puiſſances de la ſuite naturelle des nombres, & ainſi à l'infini. Si l'on ſuppoſe $a=1$, & $r=1$, c'eſt-à-dire, ſi la progreſſion primitive eſt la ſuite des nombres naturels, les progreſſions dont il s'agit actuellement, deviennent alors ce qu'on appelle les *nombres figurés*. C'eſt par cette dernière formule qu'on peut trouver le nombre des boulets d'une pile triangulaire : comme on a, dans ce cas, $a=1$, & $r=1$, elle ſe réduit à $n.\frac{n+1}{2}.\frac{n+2}{3}$.

On peut de même ſommer les ſuites que l'on formeroit en ajoutant la ſuite des quarrés, ou la ſuite des cubes, &c. de cette même manière. En un mot, on peut ſommer par ces mêmes moyens, toute ſuite de quantités, dont un terme quelconque ſera exprimé par tant de puiſſances parfaites que l'on voudra d'un même nombre n, ces puiſſances étant d'ailleurs multipliées par tels nombres connus que l'on voudra.

Propriétés & usages des Progressions géométriques.

241. On peut aussi trouver la somme des termes d'une progression géométrique, par une méthode analogue à celle que nous avons employée pour sommer les puissances des termes d'une progression arithmétique.

Supposons que $a, b; c, d, e$, &c. soient les termes consécutifs d'une progression géométrique croissante, dont la raison soit q. Puisque chaque terme contient q de fois celui qui le précède, on aura les équations suivantes $b = aq$, $c = bq$, $d = cq$, $e = dq$, &c.; donc ajoutant ces équations, on aura $b + c + d + e = (a + b + c + d) q$, où l'on voit qu'en général, le premier membre sera toujours la somme de tous les termes excepté le premier ; & le second, sera toujours la raison q multipliée par la somme de tous les termes excepté le dernier. Donc si l'on appelle s la somme de tous les termes, & u le dernier, cette équation se changera en $s - a = (s - u) q$ ou $s - a = qs - qu$, d'où l'on tire $qu - a = qs - s = (q - 1) s$; & par conséquent $s = \frac{qu - a}{q - 1}$, formule par laquelle, connoissant le premier terme a, le dernier u, & la raison q, on aura la somme s de tous les termes.

Cette même formule peut servir aussi pour les progressions décroissantes, puisque la progression décroissante prise dans un ordre renversé, est une progression croissante ; il n'y aura de changement à faire que celui de dire *dernier terme*, au lieu de *premier*, & *premier*, au lieu de *dernier*.

Si la progression décroissante s'étendoit à l'infini, la somme, s se réduiroit alors à $s = \frac{qu}{q-1}$, u marquant le premier terme. En effet, pour exprimer que la progression s'étend à l'infini, il faut introduire dans le calcul, ce que cette supposition renferme, savoir que le dernier terme est infiniment petit ; or le moyen d'exprimer cette dernière condition, c'est de le supposer nul à l'égard du terme qu ; car si on le laissoit subsister, ce seroit supposer qu'il peut encore diminuer qu, ce qui est contre la première supposition.

On voit donc que *pour avoir la somme de tous les termes d'une progression géométrique, il faut multiplier le plus grand terme, par la raison* (*) *de la progression, & ayant retranché du produit, le plus petit terme de cette même progression, diviser le reste par la raison diminuée*

(*) Par *la raison*, nous entendons, en général, le nombre de fois qu'un terme de la progression contient celui qui est immédiatement plus petit, ensorte que cet énoncé convient à la progression décroissante comme à la progression croissante.

d'une unité ; enforte que, lorfque la progreffion eft décroiffante à l'infini, cela fe réduit à multiplier le plus grand terme par la raifon, & divifer enfuite par la raifon diminuée d'une unité. Ainfi la fomme des termes de cette progreffion continuée à l'infini $\div \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} : \frac{1}{32}$, &c. eft $\frac{\frac{1}{2} \times 2}{2-1}$ ou 1 ; il en eft de même de la fomme des termes de celle-ci $\div \frac{2}{3} : \frac{2}{9} : \frac{2}{27} : \frac{2}{81}$ &c. dont la raifon, en confidérant cette progreffion comme croiffante, eft 3, puifque $\frac{2}{3}$ divifé par $\frac{2}{9}$ donne 3. En effet, la fomme des termes de cette progreffion eft, $\frac{\frac{2}{3} \times 3}{3-1}$, qui fe réduit à 1. En général toute progreffion géométrique décroiffante à l'infini dont chaque terme a pour numérateur conftant, un nombre moindre d'une unité que le dénominateur du premier terme, vaut 1. Car cette progreffion eft en général $\div \frac{n}{n+1} : \frac{n}{(n+1)^2} : \frac{n}{(n+1)^3} :$ $\frac{n}{(n+1)^4}$, &c. dont la fomme eft $\frac{\frac{n}{n+1} \times (n+1)}{n+1-1}$, ou $\frac{n}{n}$, c'eft-à-dire, 1.

Si cette conclufion paroît furprenante à quelques lecteurs, ils doivent faire attention que fi après avoir pris, par exemple, les $\frac{2}{3}$ de la ligne *AB* (*fig.* 6) que je fuppofe de 1 pied, on prend enfuite *Cd*, c'eft-à-dire, les deux tiers de la partie reftante *CB*, puis les deux tiers de la partie reftante *dB*, puis les deux tiers de la partie reftante *eB*, & ainfi à l'infini, on n'aura jamais abforbé plus que la ligne *AB*.

La même chose aura lieu si l'on prend d'abord les trois quarts de *AB*, puis les $\frac{3}{4}$ de ce qui reste, & ainsi à l'infini. Or c'est ce qu'exprime la progression $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{2}{27}$, puisque $\frac{2}{9}$ est les $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{27}$ est les $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{9}$ & ainsi de suite.

242. Nous avons vu (*Arith.* 212) qu'un terme quelconque d'une progression géométrique étoit composé du premier multiplié par la raison élevée à une puissance d'un dégré égal au nombre des termes qui précèdent celui dont il s'agit. Donc si l'on nomme a, le premier terme, u un terme quelconque, q la raison, & n le nombre des termes, on aura $u = aq^{n-1}$: & comme il entre quatre quantités dans cette équation, on peut en tirer quatre formules, qui serviront à résoudre cette question générale; Trois de ces quatre choses étant données, le premier terme, le dernier, la raison, & le nombre des termes d'une progression géométrique, trouver la quatrième. Car 1°. l'équation donne immédiatement la valeur de u. 2°. On trouvera facilement que celle de a est $a = \frac{u}{q^{n-1}}$: à l'égard de celle de q, on trouvera par ce qui a été dit (171), $q = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$. Sur quoi nous remarquerons que cette dernière équation renferme la règle que nous avons donnée en Arithmétique pour insérer plusieurs moyens proportionnels entre deux quantités données. Ces quantités sont ici a & u; mais pour avoir la raison q

qui doit régner dans la progreſſion, on voit ici qu'il faut diviſer la plus grande u, par la plus petite a, & tirer la racine du degré $n - 1$, du quotient $\frac{u}{a}$; or n étant le nombre total des termes, $n - 1$ eſt plus grand d'une unité que le nombre des moyens; ce qui s'accorde avec la règle citée.

Quant à la manière d'avoir n, dans l'équation $u = aq^{n-1}$, l'Algèbre ne fournit pas de moyens directs; mais on peut la réſoudre facilement, quoiqu'indirectement, en employant les logarithmes. Nous avons vu (*Arith.* 229) que pour élever à une puiſſance par le moyen des logarithmes, il falloit multiplier le logarithme de la quantité, par l'expoſant de cette puiſſance. Ainſi en repréſentant par L, les mots *Logarithme de*, on pourra, au lieu de La^2, prendre $2La$; au lieu de La^3, prendre $3La$; au lieu de La^n, prendre nLa. Donc, en ſe rappelant que pour multiplier par le moyen des logarithmes, il faut ajouter les logarithmes, & qu'au contraire pour diviſer, il faut retrancher le log. du diviſeur, du log. du dividende, on aura dans l'équation $u = aq^{n-1}$, $Lu = La + Lq^{n-1}$, ou $Lu = La + (n-1)Lq$; donc en tranſpoſant, $(n-1)Lq = Lu - La$, & par conſéquent, en diviſant par Lq, $n - 1 = \frac{Lu - La}{Lq}$, & enfin $n = \frac{Lu - La}{Lq} + 1$.

Pour donner quelque application de ceci, ſuppoſons qu'on ait placé au denier 20 une ſomme de 60000 livres, à condition que les intérêts que cette ſomme produira chaque année, ſoient traités comme un nouveau fonds qui produira également intérêt, & ainſi d'année en année, juſqu'à ce que le fonds ſoit monté à 1000000 livres. On demande combien on doit attendre pour toucher cette dernière ſomme.

Puiſque l'intérêt eſt ici $\frac{1}{20}$ du fonds de l'année précédente, au bout d'une année quelconque le fonds ſera égal au fonds de l'année précédente plus la vingtième partie de ce même dernier fonds; ainſi, ſi l'on repréſente par a, b, c, d, e les fonds ſucceſſifs d'année en année, on aura $b = a + \frac{1}{20}a$, $c = b + \frac{1}{20}b$, $d = c + \frac{1}{20}c$, $e = d + \frac{1}{20}d$, c'eſt-à-dire, $b = a \times (1 + \frac{1}{20})$, $c = b \times (1 + \frac{1}{20})$, $d = c\,(1 + \frac{1}{20})$, $e = d\,(1 + \frac{1}{20})$; on voit donc que chaque fonds contient toujours celui qui le précède, le même nombre de fois marqué par $1 + \frac{1}{20}$ ou $\frac{21}{20}$. La ſuite de ces fonds forme donc une progreſſion géométrique dont le premier terme a eſt 60000 livres; le dernier u, eſt 1000000 livres; la raiſon q, eſt $\frac{21}{20}$, & le nombre des termes eſt inconnu. On le trouvera donc en ſubſtituant dans la formule $n = \frac{Lu - La}{Lq} + 1$, au lieu de a, u & q, leurs valeurs, ce qui donnera $n = \frac{L\,1000000 - L\,60000}{L\frac{21}{20}} + 1$, ou (parce que $L\frac{21}{20} = L21 - L20$). . . . .
$n = \frac{L\,1000000 - L\,60000}{L21 - L20} + 1$; or, par les Tables, on trouve $L\,1000000 = 6{,}0000000$; $L\,60000 = 4{,}7781513$; $L21 = 1{,}3222193$, $L20 = 1{,}3010300$; donc. . . . . .
$n = \frac{6{,}0000000 - 4{,}7781513}{1{,}3222193 - 1{,}3010300} + 1 = \frac{1{,}2218487}{0{,}0211893} + 1 =$

57,7 + 1 à peu près ; c'eſt-à-dire, que le fonds de 60000 ſera monté à 1000000 liv. au bout de 58 ans 8 mois $\frac{1}{2}$, à peu près.

Puiſque (*Arithm.* 230) pour extraire, par le moyen des logarithmes, une racine d'un degré propoſé, il faut diviſer le logarithme de la quantité, par l'expoſant ; on peut, par le moyen des logarithmes, réſoudre facilement en nombres l'équation $q = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$; car on aura $Lq = \frac{L\frac{u}{a}}{n-1} = \frac{Lu - La}{n-1}$. Si l'on veut appliquer ceci à un exemple, il n'y a qu'à chercher quel devroit être dans le précédent, l'intérêt, pour qu'en 58 ans & $\frac{7}{10}$, le fonds de 60000 liv. montât à 1000000 liv. On a ici $a = 60000$, $u = 1000000$, $n = 58,7$: en employant les logarithmes des Tables, on trouvera $Lq = \frac{6,0000000 - 4,7781513}{58,7 - 1} = \frac{1,2218487}{57,7}$ qui donne $Lq = 0,0211757$; ce logarithme répond dans les Tables, à 1,0500 à très-peu près ; & ce dernier nombre réduit en vingtièmes, donne 21, d'où l'on conclura que l'intérêt eſt à très-peu près $\frac{1}{20}$.

On voit auſſi par-là, comment on peut facilement inſérer par le moyen des logarithmes, pluſieurs moyens proportionnels géométriques, entre deux nombres donnés.

243. L'équation $s = \frac{qu - a}{q - 1}$, donnera auſſi quatre équations qui ſerviront à réſoudre ce problême général, trois de ces quatre choſes, la ſomme, la raiſon, le premier, & le dernier terme d'une progreſſion géométrique, étant données, trouver la

quatrième. Cela eſt trop facile, à préſent, pour nous y arrêter.

Enfin ſi l'une des deux équations $s = \frac{qu-a}{q-1}$ & $u = aq^{n-1}$, on tire la valeur d'une même quantité a, ou q, ou u, &c., & qu'on la ſubſtitue dans l'autre, on aura les autres équations qui peuvent ſervir à réſoudre la queſtion ſuivante, encore plus générale; de ces cinq choſes, le premier terme, le dernier, la raiſon, la ſomme, & le nombre des termes d'une progreſſion géométrique, trois étant données, trouver chacune des deux autres.

De la ſommation des ſuites récurrentes.

244. On appelle ſuites *récurrentes*, celles dont un terme quelconque ſe forme de l'addition d'un certain nombre de termes précédens, multipliés ou diviſés par des nombres déterminés, poſitifs ou négatifs. Par exemple, la ſuite 2, 3, 19, 101, 543, &c., eſt une ſuite récurrente, parce que chaque terme eſt formé des deux précédens, en multipliant le premier par 2, le ſecond par 5, & ajoutant les deux produits; 543 eſt $19 \times 2 + 101 \times 5$; de même, 101 eſt $3 \times 2 + 19 \times 5$.

On peut ſommer ces ſuites d'une manière analogue à celle que nous avons employée ci-deſſus; il ſuffira d'en donner un exemple, ſur les ſuites récurrentes dont la loi ne dépend que de deux quantités, comme celle que nous venons d'apporter pour exemple.

Soient donc a, b, c, d, e, f, &c. plusieurs termes formés par cette loi, que chacun soit composé des deux précédens dont le premier est multiplié par un nombre connu m, & le second par un nombre connu p; on aura donc cette suite d'équations: $c = ma + pb$, $d = mb + pc$, $e = mc + pd$, $f = md + pe$, &c. Donc en ajoutant cette suite d'équations, on aura $c + d + e + f +$, &c. $= m(a + b + c + d) + p(b + c + d + e)$; or le premier membre est la somme de tous les termes, excepté les deux premiers: le multiplicateur de m, dans le second membre, est la somme de tous les termes, excepté les deux derniers; & enfin le multiplicateur de p, est la somme de tous les termes, excepté le premier & le dernier; donc en appelant s, cette somme, on aura $s - a - b = m(s - e - f) + p(s - a - f)$, d'où l'on tire $s = \frac{me + mf + pa + pf - a - b}{m + p - 1}$, qui donnera la somme, lorsqu'on connoîtra les deux premiers & les deux derniers, & de plus les quantités m & p.

On peut y faire entrer le nombre des termes; il faut pour cela, chercher l'expression générale d'un terme quelconque, par le moyen des quantités a, b, m, p & du nombre n des termes; mais cette recherche, pour toutes les espèces de séries récurrentes, nous méneroit trop loin.

De la Construction géométrique des Quantités algébriques.

245. Les lignes, les surfaces & les solides étant des quantités, on peut faire sur chacune de ces trois espèces d'étendue, les mêmes opérations qu'on fait sur les nombres & sur les quantités algébriques.

Mais les résultats des ces opérations peuvent être évalués de deux manières principales, ou en nombres, ou en lignes. La première manière supposant que chacune des quantités données est exprimée en nombres, ne peut avoir à présent aucune difficulté: il ne s'agit que de substituer à la place des lettres, les quantités numériques qu'elles représentent, & faire les opérations que la disposition des signes & des lettres indique.

Quant à la manière d'évaluer en lignes les résultats des solutions que l'Algèbre a fournies, elle est fondée sur la connoissance de ce que signifient certaines expressions fondamentales, auxquelles on rapporte ensuite toutes les autres. Nous allons faire connoître les premières, & nous ferons voir ensuite comment on y rapporte les autres: c'est-là ce qu'on appelle *construire* les quantités algébriques, ou les problêmes qui ont conduit à ces quantités.

246. Si l'on avoit à construire une quantité telle que $\frac{ab}{c}$, dans laquelle a, b, c marquent des lignes connues: on tireroit (*fig.* 7) deux lignes indéfinies AZ, AX faisant entre elles un angle quelconque. Sur l'une AX de ces lignes, on prendroit une partie AB égale à la ligne qu'on a représentée par c, puis une partie AD, égale à l'une ou à l'autre des deux lignes a & b, à a, par exemple; ensuite sur la seconde AZ, on prendroit une partie AC égale à la ligne b. Ayant joint les extrémités B & C de la première

& de la troisième, par la ligne BC, on méneroit par l'extrémité D de la seconde, la ligne DE parallèle à BC; elle détermineroit sur AZ la partie AE pour la valeur de $\frac{ab}{c}$; car (*Géom.* 102) les parallèles DE & BC donnent cette proportion $AB : AD :: AC : AE$, c'est-à-dire, $c : a :: b : AE$; donc (*Arith.* 179) $AE = \frac{ab}{c}$. C'est-à-dire, qu'il faut trouver une quatrième proportionnelle, aux trois lignes données c, a, b. Et puisque (*Géom.* 120) nous avons donné deux manières de trouver cette quatrième proportionnelle, on peut employer indifféremment l'une ou l'autre pour construire $\frac{ab}{c}$.

On voit donc que si l'on avoit à construire $\frac{aa}{c}$, ce cas rentreroit dans le précédent, puisqu'alors la ligne b est égale à a.

Si l'on avoit à construire $\frac{ab + bd}{c + d}$, on remarqueroit que cette quantité est la même que $\frac{(a + d) \times b}{c + d}$; regardant donc $a + d$ comme une seule ligne, représentée par m, & $c + d$ aussi comme une seule ligne n, on auroit $\frac{mb}{n}$ à construire, ce qui se rapporte au cas précédent.

Que l'on ait $\frac{aa - bb}{c}$, on se rappellera que $aa - bb$ est (25) la même chose que $(a + b) \times (a - b)$; ainsi, on se représentera $\frac{aa - bb}{c}$, sous cette forme ..... $\frac{(a + b)(a - b)}{c}$, & l'on cherchera une quatrième proportionnelle à c, $a + b$, & $a - b$.

Si la

Si la quantité à construire est $\frac{abc}{de}$, on mettra cette quantité sous cette forme $\frac{ab}{d} \times \frac{c}{e}$; & ayant construit $\frac{ab}{d}$, comme on vient de l'enseigner, on nommera m la ligne qu'aura donné cette construction; alors $\frac{ab}{d} \times \frac{c}{e}$, devient $\frac{mc}{e}$, qui se construit comme ci-dessus.

On voit donc que pour construire $\frac{a^2 b}{c^2}$, on se le représenteroit comme $\frac{a^2}{c} \times \frac{b}{c}$; on construiroit $\frac{a^2}{c}$, & en ayant représenté la valeur par m, on construiroit $\frac{mb}{c}$.

Ainsi tout l'art consiste à décomposer la quantité en portions, dont chacune revienne à la forme $\frac{ab}{c}$ ou $\frac{a^2}{c}$; & quoique cela puisse paroître difficile en quelques occasions, on en vient cependant facilement à bout, en employant des transformations.

Par exemple, si j'avois à construire $\frac{a^3 + b^3}{a^2 + c^2}$, je supposerois arbitrairement, $b^3 = a^2 m$, & $c^2 = an$; alors $\frac{a^3 + b^3}{a^2 + c^2}$ se changeroit en $\frac{a^3 + a^2 m}{a^2 + an}$ qui se réduit à $\frac{a^2 + am}{a + n}$, ou $\frac{(a + m) \times a}{a + n}$, quantité facile à construire (après ce qui a été dit ci-dessus), dès qu'on connoîtra m & n. Or pour connoître m & n, les équations $b^3 = a^2 m$ & $c^2 = an$, donnent $m = \frac{b^3}{a^2}$ & $n = \frac{c^2}{a}$, qui se construisent par ce qui précède.

Ainsi tant que la quantité sera rationnelle, c'est-à-dire, sans radicaux; si le nombre des dimensions du numérateur

ne ſurpaſſe que d'une unité celui des dimenſions du dénominateur, on ramènera toujours ſa conſtruction à chercher une quatrième proportionnelle à trois lignes données.

Il arrive quelquefois que les quantités ſe préſentent ſous une forme qui ſemble rendre inutile le ſecours des transformations : c'eſt lorſque la quantité n'eſt pas *homogène ;* c'eſt-à-dire, lorſque chacun des termes du numérateur ou du dénominateur n'eſt pas compoſé du même nombre de facteurs, par exemple, lorſque la quantité eſt telle que $\frac{a^3 + b}{c^2 + d}$. Mais il faut obſerver que l'on n'arrive jamais à un pareil réſultat, que lorſque dans le cours d'un calcul on a ſuppoſé (dans la vue de ſimplifier le calcul) quelqu'une des quantités égale à l'unité. Par exemple, ſi dans $\frac{a^3 + b^2 c}{a^2 + c^2}$, je ſuppoſe b égal à 1, alors j'aurai $\frac{a^3 + c}{a^2 + c^2}$. Mais comme on ne peut jamais entreprendre de conſtruire, ſans connoître les élémens qu'on emploie pour cette conſtruction, on ſait toujours dans chaque cas quelle eſt cette quantité qu'on a ſuppoſée égale à l'unité ; on pourra donc toujours la reſtituer ; & il ne peut y avoir d'embarras là-deſſus, parce que le nombre des dimenſions devant toujours être le même dans chaque terme du numérateur & du dénominateur (quoiqu'il puiſſe être différent des termes de l'un aux termes de l'autre), on reſtituera dans chaque terme une puiſſance de la ligne qu'on a priſe pour unité, ſuffiſamment élevée pour compléter le nombre des dimenſions ; ainſi, ſi j'avois à conſtruire $\frac{a^3 + b + c^2}{a + b^2}$; ſuppoſant que d ſoit la ligne qui a été priſe pour unité, j'écrirois $\frac{a^3 + bd^2 + c^2 d}{ad + b^2}$, que je conſtruirois en faiſant $b^2 = dm$, $c^2 = dn$ &

$a^3 = d^2p$, ce qui la changeroit en $\frac{d^2p + bd^2 + d^2n}{ad + dm}$, ou $\frac{dp + bd + nd}{a + m}$, ou $\frac{(p + b + n)d}{a + m}$, quantité facile à construire, dès qu'on aura construit les valeurs de m, n & p, savoir $m = \frac{b^2}{d}$, $n = \frac{c^2}{d}$, $p = \frac{a^3}{d^2}$, qui sont elles-mêmes faciles à construire, d'après ce qui a été dit ci-dessus.

Dans tout ce que nous venons de dire, nous avons supposé que le nombre des facteurs, ou le nombre des dimensions de chaque terme du numérateur, ne surpassoit que d'une unité, celui des dimensions du dénominateur. Il peut le surpasser de deux, & même de trois, mais jamais de plus, à moins que quelque ligne n'ait été supposée égale à l'unité, ou que quelques-uns des facteurs ne représentent des nombres.

247. Lorsque le nombre des dimensions du numérateur de la quantité proposée surpasse celui des dimensions du dénominateur, de deux unités; alors la quantité exprime une surface dont on peut toujours ramener la construction à celle d'un parallélogramme, & même d'un quarré.

Par exemple, si j'avois à construire la quantité $\frac{a^3 + a^2b}{a + c}$, je la considérerois comme $a \times \frac{a^2 + ab}{a + c}$; or $\frac{a^2 + ab}{a + c}$, se construit aisément par ce qui a été dit ci-dessus, en le considérant comme $a \times \frac{a + b}{a + c}$: supposons donc que m soit la valeur de la ligne qu'aura donnée cette construction;

alors $a \times \frac{a^2 + ab}{a + c}$, deviendra $a \times m$; or si l'on fait de a, la hauteur, & de m, la base d'un parallélogramme, on aura $a \times m$ pour la surface de ce parallélogramme; donc réciproquement cette surface représentera $a \times m$ ou $\frac{a^3 + a^2b}{a + c}$.

On ramènera de même à une pareille construction, la quantité $\frac{a^3 + bc^2 + d^3}{a + c}$, en faisant $bc = am$ & $d^2 = an$; car alors elle deviendra $\frac{a^3 + amc + and}{a + c}$, qui est la même chose que $a\left(\frac{a^2 + mc + nd}{a + c}\right)$. Or le facteur $\frac{a^2 + mc + nd}{a + c}$ se rapporte aux constructions précédentes, ainsi que les valeurs de m & de n. Ayant trouvé la valeur de ce facteur, si je la représente par p, il ne s'agira plus que de construire $a \times p$, c'est-à-dire, faire un parallélogramme dont la hauteur soit a, & la base p.

248. Enfin si le nombre des dimensions du numérateur surpasse de 3 celui des dimensions du dénominateur, alors la quantité exprime un solide dont on peut toujours ramener la construction à celle d'un parallélipipède.

Par exemple, si j'avois à construire $\frac{a^3b + a^2b^2}{a + c}$, je considérerois cette quantité comme étant la même que $ab \times \frac{a^2 + ab}{a + c}$; & ayant construit $\frac{a^2 + ab}{a + c}$, selon ce qui a été dit ci-dessus, si je représente par m la ligne qu'aura donnée cette construction, la question sera réduite à construire $ab \times m$; or ab représente, ainsi que nous venons de le voir, un parallélogramme; si donc on conçoit un parallélipipède qui ait pour base ce parallélogramme, & qui ait pour hauteur la ligne

m, la solidité de ce parallélipipède représentera $ab \times m$, c'est-à-dire, $\frac{a^3 b + a^2 b^2}{a + c}$.

249. Ce que nous venons de dire, suffit pour construire toute quantité rationnelle. Voyons maintenant les quantités radicales du second degré.

Pour construire $\sqrt{ab}$, il faut (*fig.* 8) tirer une ligne indéfinie AB, sur laquelle on prendra de suite la partie CA égale à la ligne a & la partie BC égale à la ligne b: sur la totalité AB comme diamètre, on décrira un demi-cercle qui coupe en D la perpendiculaire CD élevée sur AB au point C; alors CD sera la valeur de $\sqrt{ab}$; c'est-à-dire (*Géom.* 126), que pour avoir la valeur de $\sqrt{ab}$, il faut prendre une moyenne proportionnelle entre les deux quantités représentées par a & b; en effet on sait (*Géom.* 125) que $AC : CD :: CD : CB$, ou $a : CD :: CD : b$; donc, en multipliant les extrêmes & les moyens, on a $(CD)^2 = ab$, & par conséquent $CD = \sqrt{ab}$.

On voit par-là, comment on doit s'y prendre pour transformer en un quarré, une surface quelconque: s'il s'agit d'un parallélogramme dont a soit la hauteur & b la base, en nommant x le côté du quarré cherché, on aura $x^2 = ab$, & par conséquent $x = \sqrt{ab}$; on prendra donc une moyenne proportionnelle entre la base & la hauteur. S'il s'agit d'un triangle que l'on sait (*Géom.* 140) être la moitié d'un parallélogramme de même base & de même hauteur, on prendra

une moyenne proportionnelle entre la base & la moitié de la hauteur, ou entre la hauteur & la moitié de la base.

S'il s'agit d'un cercle, on prendra une moyenne proportionnelle entre le rayon & la demi-circonférence; & s'il s'agit d'une figure rectiligne quelconque, comme on sait (*Géom.* 143) qu'elle est réductible à un triangle, on la réduira aisément en un quarré, en prenant une moyenne proportionnelle entre la base & la moitié de la hauteur de ce triangle.

Mais si la figure n'étoit point construite, & que l'on eût seulement l'expression algébrique de sa surface, par le moyen de quelques-unes de ses dimensions, alors on construiroit comme pour les quantités que nous allons parcourir.

Si l'on avoit $\sqrt{(3ab+b^2)}$, on considéreroit cette quantité comme étant la même que $\sqrt{[(3a+b)\times b]}$; on prendroit donc une moyenne proportionnelle entre $3a+b$ & b.

Pareillement, si l'on a $\sqrt{(aa-bb)}$, on considérera cette quantité comme étant la même que $\sqrt{[(a+b)\times(a-b)]}$; (25) ainsi l'on prendra une moyenne proportionnelle entre $a+b$ & $a-b$. Si l'on a $\sqrt{(a^2+bc)}$, on fera $bc=am$, & alors on aura $\sqrt{(a^2+am)}$ ou $\sqrt{[(a+m)\times a]}$; on prendra donc une moyenne proportionnelle entre $a+m$ & a, après avoir construit la valeur de $m=\frac{bc}{a}$, en suivant les règles données ci-dessus.

Pour construire $\sqrt{(a^2+b^2)}$, on pourroit aussi faire $b^2=am$ & construire $\sqrt{(a^2+am)}$ selon ce qui vient d'être dit. Mais la propriété du triangle rectangle (*Géom.* 164) nous en fournit une construction plus simple; la voici: tirez une ligne AB (*fig.* 9) égale à la ligne a; à son extrémité

A, élevez une perpendiculaire AC égale à la ligne b; alors si vous tirez BC, cette ligne sera la valeur de $\sqrt{(a^2 + b^2)}$: en effet, puisque le triangle CAB est rectangle, on a (*Géom.* 164) $(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 = a^2 + b^2$; donc $BC = \sqrt{(a^2 + b^2)}$.

On peut aussi, par le moyen du triangle rectangle, construire $\sqrt{(a^2 - b^2)}$ autrement que nous ne l'avons fait ci-dessus. Pour cet effet, on tirera (*fig.* 11) une ligne AB égale à a, & ayant décrit sur AB comme diamètre, le demi-cercle ACB, on tirera du point A, une corde $AC = b$; alors si l'on tire BC, cette ligne sera la valeur de $\sqrt{(a^2 - b^2)}$; car le triangle ABC étant rectangle (*Géom.* 165), on a $(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$; donc $(BC)^2 = (AB)^2 - (AC)^2 = a^2 - b^2$; donc $BC = \sqrt{(a^2 - b^2)}$.

On peut donc construire aussi $\sqrt{(a^2 + bc)}$ autrement que nous ne l'avons fait ci-dessus, en s'y prenant de cette manière. Faire $bc = m^2$, & construire $\sqrt{(a^2 + m^2)}$ comme il vient d'être dit; & pour cet effet, on commencera par déterminer m en prenant une moyenne proportionnelle entre b & c, ainsi que l'indique l'équation $bc = m^2$, qui donne $m = \sqrt{bc}$.

S'il y avoit plus de deux termes sous le radical, on rameneroit toujours la construction à quelques-unes

des méthodes précédentes, par le moyen de transformations. Par exemple, si j'avois $\sqrt{(a^2+bc+ef)}$, je ferois $bc = am$, $ef = an$, & j'aurois $\sqrt{(a^2+am+an)}$ ou $\sqrt{[(a+m+n)\times a]}$, que je construirois en prenant une moyenne proportionnelle entre a & $a+m+n$, après avoir construit les valeurs de m & de n, savoir $m = \frac{bc}{a}$, $n = \frac{ef}{a}$. Je pourrois encore faire $bc = m^2$, $ef = n^2$, & alors j'aurois à construire $\sqrt{(a^2+m^2+n^2)}$. Or lorsque le radical renferme ainsi une suite de quarrés positifs, par exemple, $\sqrt{(a^2+m^2+n^2+p^2+\&c.)}$ on fera $\sqrt{(a^2+m^2)} = h$ $\sqrt{(h^2+n^2)} = i$, $\sqrt{(i^2+p^2)} = k$, & ainsi de suite; & comme chacune de ces quantités se trouve déterminée par la précédente, la dernière donnera la valeur de $\sqrt{(a^2+m^2+n^2+p^2+\&c.)}$. Pour construire ces quantités de la manière la plus simple, on regardera successivement chaque hypoténuse comme un côté, par exemple, (*fig. 10*) ayant pris $AB = a$, élevé la perpendiculaire $AC = m$, & tiré BC qui sera h, on élevera au point C, sur BC, la perpendiculaire $CD = n$; & ayant tiré BD qui sera i, à son extrémité D, on élevera sur BD la perpendiculaire $DE = p$, & BE sera k ou $\sqrt{(a^2+m^2+n^2+p^2)}$.

Si quelques-uns de ces quarrés sont négatifs, alors on réunira à ce que nous venons de dire, ce qui a été dit pour construire $\sqrt{(a^2-b^2)}$.

Enfin si l'on avoit à construire une quantité de cette forme $\frac{a\sqrt{(b+c)}}{\sqrt{(d+e)}}$, on la changeroit en $\frac{a\sqrt{[(b+c)(d+e)]}}{d+e}$, en multipliant haut & bas par $\sqrt{(d+e)}$; alors cherchant une moyenne proportionnelle entre $b+c$ & $d+e$, & la nommant m, on auroit à construire $\frac{am}{d+e}$, ce qui est facile.

Au reste, il s'agit ici de règles générales; on peut souvent construire d'une manière beaucoup plus simple, en partant toujours des mêmes principes; mais ces simplifications se tirent de quelques considérations particulières & propres à chaque question, & ne peuvent, par conséquent, être exposées qu'à mesure que les questions en amènent l'occasion. Nous remarquerons seulement, en terminant cette matière, que quoique la construction des quantités radicales, dont il vient d'être question, se réduise à prendre des quatrièmes proportionnelles, des moyennes proportionnelles, & à construire des triangles rectangles, cependant on peut quelquefois avoir des constructions plus ou moins simples ou élégantes, selon la méthode qu'on emploie pour trouver ces moyennes proportionnelles; c'est pourquoi nous enseignerons ici deux autres manières de trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données.

La première consiste à décrire sur la plus grande

AB des deux lignes données (*fig. 11*) un demi-cercle *ACB*; & ayant pris une partie *AD* égale à la feconde, élever la perpendiculaire *DC*, & tirer la corde *AC* qui fera moyenne proportionnelle entre *AB* & *AD*; car en tirant *CB*, le triangle *ACB* (*Géom.* 65) eft rectangle, & par conféquent, (*Géom.* 112) *AC* eft moyenne proportionnelle entre l'hypoténufe *AB* & le fegment *AD*.

La feconde manière confifte (*fig. 12*) à tirer une ligne *AB* égale à la plus grande ligne donnée, & ayant pris fur elle une partie *AC* égale à la plus petite, décrire fur le refte *BC*, un demi-cercle *CDB*, auquel on mène la tangente *AD*, qui (*Géom.* 129) eft moyenne proportionnelle entre *AB* & *AC*.

On voit donc que les quantités rationnelles peuvent toujours être conftruites par le moyen des lignes droites, & que les quantités radicales du fecond degré peuvent être conftruites par le cercle & la ligne droite réunis.

Quant aux quantités radicales de degrés fupérieurs, leur conftruction dépend de la combinaifon de différentes lignes courbes : nous en parlerons par la fuite.

Nous allons nous occuper, pour le préfent, des queftions dont la folution dépend de quantités ou rationnelles, ou radicales du fecond degré.

Diverſes queſtions de Géométrie, & réflexions tant ſur la manière de les mettre en équations, que ſur les diverſes ſolutions que donnent ces Équations.

250. Le principe que nous avons donné (67) pour mettre les queſtions en équation, s'applique également aux queſtions de Géométrie. Il faut de même repréſenter ce que l'on cherche, par un ſigne particulier, & raiſonner enſuite à l'aide de ce ſigne & de ceux qui repréſentent les autres quantités, comme ſi tout étoit connu, & que l'on voulût vérifier. Cette méthode ou manière de procéder, eſt ce qu'on appelle l'*Analyſe*. Pour être en état de faire les raiſonnemens qu'exige cette vérification, il faut connoître au moins quelques propriétés de la quantité que l'on cherche. Il eſt donc clair que pour être en état de mettre les queſtions de Géométrie en équation, il faut avoir préſentes à l'eſprit les connoiſſances que nous avons données dans la ſeconde Partie de ce Cours. Dans la plupart des queſtions numériques, ou de la nature de celles que nous avons parcourues dans la première Section, il ſuffit le plus ſouvent, pour appliquer le principe, de traduire en langage algébrique l'énoncé de la queſtion; mais dans l'application de l'Algèbre à la Géométrie, il faut ſouvent employer encore

d'autres moyens : nous tâcherons de les faire connoître à mesure que nous avancerons ; mais ce que nous pouvons dire en général, pour le présent, c'est qu'il n'est pas toujours nécessaire, pour vérifier une quantité, d'examiner si elle satisfait immédiatement aux conditions de la question : cette vérification se fait souvent avec plus de facilité, en examinant si cette quantité a certaines propriétés qui sont essentiellement liées avec les conditions de la question. Après cette réflexion dont nous aurons occasion de faire usage, nous passons aux exemples, qui dans cette matière sont toujours plus faciles à saisir que les préceptes généraux.

251. Proposons-nous donc pour première question, de *décrire un quarré* ABCD (fig. 13) *dans un triangle donné* EHL.

Par ces mots, *un triangle donné*, nous entendons un triangle dans lequel tout est connu, les côtés, les angles, la hauteur, &c.

Avec un peu d'attention, on voit que cette question se réduit à trouver sur la hauteur EF un point G par lequel menant AB parallèle à HI, cette ligne AB soit égale à GF; ainsi l'équation se présente tout naturellement ; il n'y a qu'à déterminer l'expression algébrique de AB, & celle de GF, & ensuite les égaler.

Nommons donc a la hauteur connue EF; b la base connue HI, & x la ligne inconnue GF; alors EG vaudra $a - x$.

Or puisque AB est parallèle à HI, on doit (*Géom.* 115) avoir $EF : EG :: FI : GB :: HI : AB$; c'est-à-dire, $EF : EG :: HI : AB$, ou $a : a - x :: b : AB$; donc (*Arith.* 179) $AB = \frac{ab - bx}{a}$; puis donc que AB doit être égal à GF, on aura $\frac{ab - bx}{a} = x$; d'où, par les règles de la première Section, on tire $x = \frac{ab}{a + b}$.

Pour construire cette quantité, il faut, conformément à ce que nous avons dit (246), trouver une quatrième proportionnelle à $a + b$, b, & a, ce que l'on exécutera en cette manière. On portera de F en O une ligne FO égale à $a + b$, c'est-à-dire, égale à $EF + HI$, & l'on tirera EO; puis ayant pris FM égale à $HI = b$, on mènera, parallèlement à EO, la ligne MG, qui par sa rencontre avec EF, déterminera GF pour la valeur de x; car les triangles semblables EFO, GFM donnent $FO : FM :: FE : FG$, ou $a + b : b :: a : FG$; FG vaudra donc $\frac{ab}{a + b}$.

252. Proposons-nous pour seconde question, celle-ci... *Connoissant la longueur de la ligne* BC (fig. 14),

& les angles B *&* C *que forment avec elle les deux lignes* BA *&* CA, *déterminer la hauteur* AD *à laquelle ces deux dernières lignes se rencontrent.*

On fait entrer les angles dans le calcul algébrique à l'aide des mêmes lignes qu'on emploie dans la Trigonométrie, c'est-à-dire, à l'aide des sinus, tangentes, &c. Ainsi quand on dit qu'on donne un angle, l'angle C, par exemple, on entend que l'on donne la valeur de son sinus ou de sa tangente; cela posé, nommons $BC = a$, $AD = y$. Dans le triangle rectangle ADC, nous aurons (*Géom.* 296) $CD : DA ::$ comme le rayon est à la tangente de l'angle ACD : ou $CD : y :: r : m$, en appelant r le rayon & m la tangente de l'angle ACD; donc (*Arith.* 179) $CD = \frac{ry}{m}$. Par un raisonnement semblable, on trouvera, en nommant n la tangente de ABD, $BD : y :: r : n$, donc $BD = \frac{ry}{n}$; or $BD + DC = BC = a$; donc $\frac{ry}{m} + \frac{ry}{n} = a$. D'où l'on tire $y = \frac{amn}{rn + rm}$.

On peut rendre cette expression plus simple, en introduisant, au lieu des tangentes m & n des deux angles C & B, leurs cotangentes que nous nommerons p & q. Pour cet effet, il faut se rappeler (*Géom.* 280) que *tang.* : r :: r : *cot.*; en vertu de

cette propoſition, on aura $m : r :: r : p$ & $n : r :: r : q$; d'où l'on tire $m = \frac{r^2}{p}$ & $n = \frac{r^2}{q}$; ſubſtituant, au lieu de m & n, ces valeurs, dans celle de y, on aura $y = \frac{\frac{a r^4}{p q}}{\frac{r^3}{p} + \frac{r^3}{q}} = \frac{\frac{a r^4}{p q}}{\frac{p r^3 + q r^3}{p q}} = \frac{a r^4}{p q} \times \frac{p q}{p r^3 + q r^3}$ $= \frac{ar}{p + q}$, qui ſe conſtruit facilement en prenant une quatrième proportionnelle à $p + q$, r & a.

253. On voit par-là, que lorſque parmi les quantités qu'on peut regarder comme données, celles qu'on a employées ne conduiſent pas à un réſultat auſſi ſimple qu'on le deſire, il n'eſt pas néceſſaire de recommencer un nouveau calcul pour s'aſſurer ſi, en employant les autres données, on ne pourroit pas arriver à un réſultat plus ſimple. Il ſuffit d'exprimer par des équations les rapports des données qu'on a employées d'abord, avec celles qu'on veut introduire, c'eſt ainſi que nous venons d'exprimer m & n par les équations $m = \frac{r^2}{p}$, $n = \frac{r^2}{q}$; alors par de ſimples ſubſtitutions, nous avons eu une ſolution dépendante de p & de q.

254. Nous choiſirons pour troiſième exemple une queſtion qui nous donne lieu tout à la fois de faire voir la manière de mettre en équation les queſtions de Géométrie, & comment par différentes

préparations de ces équations, on peut découvrir de nouvelles propositions.

Connoissant les trois côtés d'un triangle ABC (fig. 15), *trouver les segmens* AD & DC *formés par la perpendiculaire* BD, & *la perpendiculaire* BD *elle-même.*

Si je connoissois chacune de ces lignes, voici comment je les vérifierois. J'ajouterois le quarré de BD avec le quarré de CD, & je verrois si la somme est égale au quarré de BC; ce qui doit être, puisque le triangle BDC est rectangle (*Géom.* 164). J'ajouterois de même le quarré de AD au quarré de BD, & je verrois si la somme est égale au quarré de AB.

Imitons donc ce procédé, & pour cet effet nommons BD, y; CD, x; $BC = a$; $AB = b$; $AC = c$; alors AD qui est $= AC - CD$, sera $= c - x$. Nous aurons donc $xx + yy = aa$, & $cc - 2cx + xx + yy = bb$.

Comme xx & yy n'ont, dans chaque équation, d'autre coëfficient que l'unité, je retranche la seconde équation de la première, ce qui me donne tout de suite, $2cx - cc = aa - bb$; d'où l'on tire $x = \frac{aa - bb + cc}{2c}$ $= \frac{aa - bb}{2c} + \frac{1}{2}c$, qu'on peut écrire ainsi, $x = \frac{1}{2}\frac{(a+b)(a-b)}{c} + \frac{1}{2}c$ (25).

Or,

Or, ſous cette forme, on voit, d'après ce qui a été dit (246), que pour avoir x il faut chercher une quatrième proportionnelle à c, $a+b$, & $a-b$; & l'ayant trouvée, en prendre la moitié que l'on ajoutera avec $\frac{1}{2}c$, c'eſt-à-dire, avec la moitié du côté AC; ce qui eſt abſolument conforme à ce que nous avons dit (*Géom.* 303).

Mais on peut tirer pluſieurs autres concluſions de ces mêmes équations; nous allons en expoſer quelques-unes, pour accoutumer les commençans à lire dans une équation ce qu'elle renferme.

255. 1°. L'équation $2cx - cc = aa - bb$, eſt la même choſe que $c.(2x - c) = (a+b)(a-b)$. Or puiſque le produit des deux premiers facteurs eſt égal au produit des deux derniers, on peut (*) conſidérer les deux premiers, comme les extrêmes, & les deux derniers comme les moyens d'une proportion, & l'on aura par conſéquent $c : a+b :: a-b : 2x-c$; or $2x-c$ eſt x moins $c-x$; donc en remettant à la place de ces lettres, les lignes qu'elles repréſentent, on aura $AC : BC + AB :: BC - AB : CD - AD$, ce qui eſt préciſément ce que nous avons démontré (*Géom.* 302).

(*) Dorénavant lorſque nous aurons ainſi partagé chaque membre d'une équation en deux facteurs, nous conclurons tout de ſuite la proportion. Il ſuffit d'être averti, une fois pour toutes, que dès que deux produits ſont égaux, les facteurs de l'un peuvent être conſidérés comme les extrêmes d'une proportion dont les facteurs de l'autre ſeroient les moyens (*Arith.* 180).

256. 2°. Si du point C comme centre, & d'un rayon égal à BC, on décrit l'arc BO, & si l'on tire la corde BO, on aura $(BD)^2 + (DO)^2 = (BO)^2$; or $DO = CO - CD = BC - CD = a - x$; donc $(BO)^2 = yy + aa - 2ax + xx$; mais nous avons trouvé ci-dessus $yy + xx = aa$; donc $(BO)^2 = 2aa - 2ax = 2a(a - x)$; mettant donc pour x, sa valeur $\frac{aa - bb + cc}{2c}$, on aura $(BO)^2 = 2a\left(a + \frac{bb - aa - cc}{2c}\right) = 2a\left(\frac{2ac - aa - cc + bb}{2c}\right) = \frac{a}{c} \times [bb - (a-c)^2]$; parce que $2ac - aa - cc = -(aa - 2ac + cc) = -(a-c)^2$; or (25) en considérant $a - c$ comme une seule quantité, on a $bb - (a - c)^2 = (b + a - c)(b - a + c)$; donc $(BO)^2 = \frac{a}{c}(b + a - c)(b - a + c)$ qu'on peut mettre sous cette autre forme $(BO)^2 = \frac{a}{c}(a + b + c - 2c)(a + b + c - 2a)$; donc si on nomme $2s$ la somme des trois côtés, on aura $(BO)^2 = \frac{a}{c}(2s - 2c)(2s - 2a) = 4\frac{a}{c}(s - a)(s - c)$; or si du point C, on abaisse sur OB la perpendiculaire CI, on aura (*Géom.* 295) dans le triangle rectangle CIO, cette proportion $CO : OI :: R : \text{sin. } OCI$, c'est-à-dire, $a : \frac{1}{2} BO :: R : \text{sin. } OCI$; donc $\frac{1}{2} BO = \frac{a \text{ sin. } OCI}{R}$, ou $BO = \frac{2a \text{ sin. } OCI}{R}$; & par conséquent $\overline{BO}^2 = \frac{4a^2 (\text{sin. } OCI)^2}{R^2}$ égalant ces deux valeurs de BO^2, on aura $\frac{4a^2}{R^2}(\text{sin. } OCI)^2 = \frac{4a}{c}(s - a)(s - c)$, ou en divisant par $4a$, & chassant les dénominateurs, $ac(\text{sin. } OCI)^2 = R^2(s - a)(s - c)$, d'où l'on tire cette proportion $ac : (s - a)(s - c) :: R^2 : (\text{sin. } OCI)^2$;

qui eſt la règle que nous avons donnée (*Géom.* 304) pour trouver les angles d'un triangle par le moyen des trois côtés, mais dont nous avons renvoyé la démonſtration à cette troiſième Partie. En effet ac eſt le produit des deux côtés qui comprennent l'angle BCA; $s - a$ & $s - c$ ſont les deux reſtes que l'on a en retranchant ces deux mêmes côtés ſucceſſivement de la demi-ſomme, R eſt le rayon, & OCI eſt la moitié de l'angle BCA, puiſque CI eſt une perpendiculaire menée du centre C ſur la corde BO.

257. 3°. L'équation $yy + xx = aa$, donne $yy = aa - xx = (a + x)(a - x)$; donc en mettant pour x, ſa valeur, on aura. . . . .

$$yy = \left(a + \frac{aa - bb + cc}{2c}\right)\left(a + \frac{bb - aa - cc}{2c}\right) =$$
$$\left(\frac{2ac + aa + cc - bb}{2c}\right) \times \left(\frac{2ac - aa - cc + bb}{2c}\right) =$$
$$\left(\frac{(a + c)^2 - bb}{2c}\right) \times \left(\frac{bb - (a - c)^2}{2c}\right) =$$
$$\left(\frac{a + c + b)(a + c - b}{2c}\right) \times \left(\frac{b + a - c) \times (b - a + c}{2c}\right),$$

donc $4ccyy = (a + c + b)(a + c - b)(b + c - a)(b - c + a)$, ou $4ccyy = (a + b + c)(a + b + c - 2b)(a + b + c - 2a)(a + b + c - 2c)$; donc en nommant $2s$ la ſomme $a + b + c$ des trois côtés, on aura $4ccyy = 2s \cdot (2s - 2b)(2s - 2a)(2s - 2c)$, ou $4ccyy = 16s \cdot (s - a)(s - b)(s - c)$, ou diviſant par 16, réduiſant, & tirant la racine quarrée, $\frac{cy}{2} = \sqrt{[s \cdot (s - a)(s - b)(s - c)]}$. Mais $\frac{cy}{2}$ ou $\frac{AC \times BD}{2}$ eſt la ſurface du triangle ABC; donc pour avoir la ſurface d'un triangle, par le moyen des trois côtés, il faut de la demi-ſomme retrancher ſucceſſivement chacun

des trois côtés ; multiplier les trois restes entre eux & par la demi-somme, & enfin tirer la racine quarrée de ce produit.

258. 4°. L'équation $2cx - cc = aa - bb$, donne $bb = aa + cc - 2cx$; mais si la perpendiculaire tomboit hors du triangle, on auroit, en conservant les mêmes dénominations (*fig. 16*), $yy + xx = aa$, & $yy + cc + 2cx + xx = bb$, parce que AD qui étoit $c - x$, est ici $c + x$. Donc retranchant la première équation de la seconde, on auroit $cc + 2cx = bb - aa$, ou $c(c + 2x) = (b + a) \times (b - a)$, qui donne $c : b + a :: b - a : c + 2x$; or $c + 2x$ étant $x + c + x$ est $CD + AD$; donc $AC : AB + BC :: AB - BC : CD + AD$, ce qui est la seconde partie de la proposition que nous avons démontrée (*Géom.* 302).

259. 5°. La même équation $cc + 2cx = bb - aa$, donne $bb = aa + cc + 2cx$; comparant donc à l'équation $bb = aa + cc - 2cx$ qui convient à la figure 15, on voit que le quarré bb du côté AB opposé à l'angle aigu C, vaut moins que la somme $aa + cc$ des quarrés des deux autres côtés, puisqu'il vaut cette somme diminuée de $2cx$. Au contraire, le quarré bb du côté AB, opposé à l'angle obtus (*fig. 16*) vaut $aa + cc + 2cx$, c'est-à-dire, plus que la somme des quarrés des deux autres côtés. On peut donc, par ces deux remarques, lorsqu'on a à calculer les angles d'un triangle par le moyen des côtés, reconnoître si l'angle que l'on cherche, doit être aigu ou obtus.

260. 6°. Les deux équations $bb = aa + cc - 2cx$, & $bb = aa + cc + 2cx$, confirment ce que nous avons

dit sur les quantités négatives. Car on voit que selon que la perpendiculaire *BD* (*fig.* 15 & 16) tombe dans le triangle ou au-dehors, le segment *CD* est de différens côtés. Or dans ces équations le terme $2cx$ a en effet des signes contraires. Donc réciproquement, quels que soient les calculs que l'on aura faits pour l'un de ces triangles, on aura ceux qui conviennent pour les cas analogues du second, en donnant des signes contraires aux parties qui seront situées de différens côtés, sur une même ligne: or dans ce que nous avons dit ci-dessus, tant sur le calcul de l'un des angles, que sur celui de la surface, le segment *CD* n'y entre plus; donc ces deux propositions appartiennent indifféremment à toute espèce de triangle rectiligne.

On pourroit tirer encore de ces mêmes équations, plusieurs autres propositions; mais nous avons d'autres objets à envisager.

261. Quoiqu'en général on ait d'autant plus de ressources & de facilité pour mettre les questions de Géométrie en équation, que l'on connoît un plus grand nombre de propriétés des lignes; cependant, comme l'Algèbre elle-même fournit les moyens de trouver ces propriétés, le nombre des propositions vraiment nécessaires, est assez limité. Ces deux propositions, que *les triangles semblables ont leurs côtés homologues proportionnels*, & que *dans un triangle rectangle, la somme des quarrés des deux côtés de l'angle droit, est égale au quarré de l'hypoténuse*, ces

deux propofitions, dis-je, font la bafe de l'application de l'Algèbre à la Géométrie. Mais felon la nature des queftions, il peut y avoir bien des manières de faire ufage de ces deux propofitions. Cet ufage n'étoit point difficile à appercevoir dans la queftion que nous venons de traiter. Mais dans les conféquences que nous avons tirées de fa réfolution pour le calcul de l'angle, par le moyen des trois côtés, l'idée de décrire l'arc *BO* (*fig.* 15), pour calculer la corde *BO* & par fa moitié *OI*, calculer le finus de l'angle *OCI*, cette idée ne fe préfente pas d'abord. Il en eft de même de beaucoup d'autres queftions. Tantôt ce font des lignes qu'il faut prolonger jufqu'à ce qu'elles en rencontrent d'autres; tantôt des lignes qu'il faut mener parallèles à quelque autre, ou faifant un angle donné avec quelque autre. En un mot, l'application de l'Algèbre à la Géométrie, ainfi qu'à toute autre matière, exige de la part de *l'Analyfte*, un certain difcernement dans le choix & l'emploi des moyens. Mais comme ce difcernement s'acquiert en grande partie par l'ufage, nous allons appliquer ces obfervations à divers exemples.

262. Propofons-nous d'abord cette queftion : *D'un point* A (fig. 17) *dont la fituation eft connue à l'égard de deux lignes* HD & DI *qui font entre elles un angle*

connu HDI, *tirer une ligne droite* AEG *de manière que le triangle intercepté* EDG, *ait une surface donnée; c'est-à-dire, une surface égale à celle d'un quarré connu* cc.

Du point *A* menons la ligne *AB* parallèle à *DH*, & la ligne *AC* perpendiculaire sur *DG* prolongée: du point *E* où la ligne *AEG* doit couper *DH*, concevons la perpendiculaire *EF*. Si nous connoissions *EF* & *DG*, en les multipliant l'une par l'autre, & prenant la moitié du produit, nous aurions la surface du triangle *EDG*, laquelle devroit être égale à cc.

Supposons donc $DG = x$; à l'égard de *EF*, voyons si nous ne pouvons pas en déterminer la valeur, tant par le moyen de x, que de ce qu'il y a de connu dans la question.

Puisqu'on suppose que la situation du point *A* est connue, on doit regarder comme connue la distance *BD* à laquelle passe la parallèle *AB*, & la distance *AC* du point *A* à la ligne *DG* prolongée. Nommons donc *BD*, a, & *AC*, b; alors les triangles semblables *ABG* & *EDG*, nous donnent $BG : DG :: AG : EG$; & les triangles semblables $ACG : EFG$, nous donnent $AG : EG :: AC : EF$; donc $BG : DG :: AC : EF$; c'est-à-dire, $a + x : x :: b : EF$; donc (*Arith.* 179)

$EF = \frac{bx}{a+x}$ (*); puis donc que la ſurface du triangle EDG doit être égale au quarré cc, il faut que $EF \times \frac{DG}{2}$ ou $\frac{bx}{a+x} \times \frac{x}{2} = cc$, c'eſt-à-dire, que $\frac{bxx}{2a+2x} = cc$, ou chaſſant le dénominateur, $bxx = 2acc + 2ccx$.

Cette équation réſolue ſuivant les règles des équations du ſecond degré (99 & 100), donne ces deux valeurs, $x = \frac{cc}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{c^4}{bb} + \frac{2acc}{b}\right)}$; dont celle qui a le ſigne — eſt inutile à la queſtion précédente.

Pour conſtruire la première, je la mets ſous la forme ſuivante, $x = \frac{cc}{b} + \sqrt{\left[\left(\frac{cc}{b} + 2a\right)\frac{cc}{b}\right]}$: cela poſé, ayant tiré une ligne indéfinie PQ (*fig. 18*), ſur un point quelconque C de cette ligne, j'élève la perpendiculaire $AC = b$, & je prends ſur CA & CP les lignes CO, CM égales chacune au côté c du quarré donné; ayant tiré AM, je lui mène par le point O la parallèle ON qui me détermine CN pour la valeur de $\frac{cc}{b}$, puiſque les triangles ſemblables ACM, OCN donnent $AC : OC :: CM : CN$,

(*) A l'avenir, toutes les fois que nous aurons à exprimer un terme d'une proportion dont trois ſeront exprimés algébriquement, nous prendrons, ſans en avertir davantage, le produit des deux moyens diviſé par l'extrême, ou des deux extrêmes diviſé par le moyen, ſelon que le terme cherché ſera un extrême ou un moyen.

c'est-à-dire, $b : c :: c : CN$; donc $CN = \frac{cc}{b}$; cela étant, la valeur de x devient donc $x = CN + \sqrt{[(CN + 2a) \times CN]}$; or $\sqrt{[(CN + 2a) \times CN]}$ exprime (249) une moyenne proportionnelle entre CN & $CN + 2a$; il ne s'agit donc plus que de déterminer cette moyenne proportionnelle, & de l'ajouter à CN. Pour cet effet, sur NC prolongée, je prends $CQ = 2a$; & sur la totalité NQ, je décris le demi-cercle NVQ rencontré en V par CA; je porte la corde NV de N en P, & j'ai CP pour la valeur de x; car NV (*Géom.* 112) est moyenne proportionnelle entre NC & NQ, c'est-à-dire, entre CN & $CN + 2a$; donc NV ou $PN = \sqrt{[(CN + 2a) \times CN]}$; donc $CP = CN + PN = CN + \sqrt{[(CN + 2a) \times CN]} = x$; on portera donc CP de D en G (*fig.* 17), & l'on aura le point G par lequel & par le point A tirant AG, on aura le triangle EDG égal au quarré cc.

263. Si l'on veut savoir ce que signifie la seconde valeur de x, savoir, $x = \frac{cc}{b} - \sqrt{\left[\left(\frac{cc}{b} + 2a\right) \frac{cc}{b}\right]}$, on remarquera que rien, dans la question, ne déterminant s'il s'agit plutôt de l'angle EDG (*fig.* 17) que de son égal $E'DG'$ formé par le prolongement des lignes GD, ED, & les quantités données étant les mêmes pour celui-ci que pour l'autre, cette seconde solution doit être celle de la question où il s'agiroit de faire dans l'angle $E'DG'$ la même chose que nous avons faite dans l'angle EDG. En effet,

en nommant DG', x; & conservant les autres dénominations, les triangles ABG', $E'DG'$, semblables à cause des parallèles AB & DE' donnent $BG' : DG' :: AG' : G'E'$; & en abaissant la perpendiculaire $E'F'$, les triangles semblables ACG', $E'F'G'$ donnent $AG' : G'E' :: AC : F'E'$; donc $BG' : DG' :: AC : F'E'$, c'est-à-dire, $a - x : x :: b : F'E'$; donc $F'E' = \frac{bx}{a-x}$; puis donc que la surface du triangle $G'E'D$ doit être égale au quarré cc, il faut que $\frac{bx}{a-x} \times \frac{x}{2} = cc$; ce qui donne $bxx = 2acc - 2ccx$, & par conséquent, $x = \frac{-cc}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{c^4}{bb} + \frac{2acc}{b}\right)}$, valeurs de x qui sont précisément les mêmes que celles du cas précédent, avec cette différence qu'elles ont des signes contraires, ainsi que cela doit être, puisqu'ici la quantité x est prise du côté opposé à celui où on la prenoit d'abord. Nouvelle confirmation de ce que nous avons déjà dit plus d'une fois, que les valeurs négatives devoient être prises dans un sens opposé à celui où l'on a pris les positives.

La construction que nous avons donnée pour le cas précédent, sert aussi pour celui-ci, avec ce seul changement, de porter (*fig. 18*) NV de N en K vers Q; alors la valeur de x, qui dans le cas précédent, étoit CP, sera CK dans celui-ci. En effet, la valeur de x, qui convient au cas présent, est $x = -\frac{cc}{b} + \sqrt{\left(\frac{c^4}{bb} + \frac{2acc}{b}\right)}$ ou $x = -\frac{cc}{b} + \sqrt{\left[\left(\frac{cc}{b} + 2a\right) \times \frac{cc}{b}\right]}$, c'est-à-dire, $x = -CN + \sqrt{[(CN + 2a) \times CN]}$; puis donc que $NV = \sqrt{[(CN + 2a) \times CN]}$, on a $x = -CN + NV = -CN + NK = CK$; ainsi on portera CK de

D en G' (*fig.* 17), & l'on aura le point G' par lequel & par le point A tirant $AG'E'$, on aura le triangle $G'DE'$ égal au quarré cc; c'eſt-à-dire, la ſeconde ſolution de la queſtion.

264. Nous avons ſuppoſé que le point A (*fig.* 17) étoit au-deſſus de la ligne BG; s'il étoit au-deſſous, (*fig.* 19) la quantité b, ou la ligne AC ſeroit négative, & les deux premières valeurs de x ſeroient par conſéquent $x = -\frac{cc}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{c^4}{bb} - \frac{2acc}{b}\right)}$ ou $x = -\frac{cc}{b} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{cc}{b} - 2a\right) \times \frac{cc}{b}\right]}$; où l'on voit que le problême n'eſt poſſible alors que lorſque $2a$ eſt plus petit que $\frac{cc}{b}$, puiſque lorſqu'il eſt plus grand, la quantité qui eſt ſous le radical, eſt négative, & par conſéquent (98) les valeurs de x ſont imaginaires ou abſurdes. Lorſque $2a$ eſt plus petit que $\frac{cc}{b}$, les deux valeurs de x ſont négatives; c'eſt-à-dire, qu'alors le problême eſt impoſſible à l'égard de l'angle HDI; mais il a deux ſolutions à l'égard de ſon égal $E'DG'$. Pour avoir ces deux ſolutions, il faut conſtruire les deux valeurs $x = -\frac{cc}{b} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{cc}{b} - 2a\right) \times \frac{cc}{b}\right]}$, ce que l'on fera de la manière ſuivante. Ayant déterminé, comme ci-deſſus, la valeur CN de $\frac{cc}{b}$, on prendra (*fig.* 20) $NQ = 2a$, & ayant décrit ſur NQ comme diamètre, le demi-cercle NVQ, on lui mènera la tangente CV; on portera enſuite CV de C en P vers N, & de C en K à l'oppoſite; alors NP & NK ſeront les deux valeurs de x; on les portera (*fig.* 19) de D en G & de D en G'; & tirant par le point A & par les points G & G' les deux droites

EG, $E'G'$, chacun des deux triangles EDG, $E'DG'$ sera égal au quarré ec. Quant à ce que nous disons que NP & NK (*figure* 20) seront les deux valeurs de x, cela se tire de ce que (*Géométrie* 129) CV étant moyenne proportionnelle entre CN & CQ, est $= \sqrt{(CQ \times CN)}$, ou (en mettant pour ces lignes, leurs valeurs) CV ou CP ou $CK = \sqrt{\left[\left(\frac{cc}{b} - 2a\right) \times \frac{cc}{b}\right]}$; donc $NP = CN - CP = \frac{cc}{b} - \sqrt{\left[\left(\frac{cc}{b} - 2a\right)\frac{cc}{b}\right]}$; & $NK = CN + CK = \frac{cc}{b} + \sqrt{\left[\left(\frac{cc}{b} - 2a\right) \times \frac{cc}{b}\right]}$; or ces deux quantités sont les mêmes que les valeurs de x, en changeant les signes; donc ces mêmes quantités portées de D vers G (*fig.* 19) seront les valeurs de x.

265. Si le point A (*fig.* 21) étoit dans l'angle même HDI, alors BD tombant du côté opposé à celui où il tomboit d'abord, a seroit négatif & les deux valeurs primitives de x, deviendroient $x = \frac{cc}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{c^4}{bb} - \frac{2acc}{b}\right)}$, qui sont les mêmes (en changeant les signes) que celles que nous venons de construire. On voit donc qu'alors on doit construire, comme on l'a fait (*fig.* 20); mais porter les valeurs NP & NK de x, les porter, dis-je (*fig.* 21), de D vers I; & l'on aura les deux triangles DEG, $DE'G'$ qui satisferont tous deux à la question.

266. Enfin, le point A (*fig.* 22) pourroit être situé au-dessous de BD, mais dans l'angle BDE'. Alors a & b seroient tous deux négatifs, ce qui donneroit $x = -\frac{cc}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{c^4}{bb} + \frac{2acc}{b}\right)}$, qui sont précisément de signe contraire aux premières valeurs que nous avons trouvées pour x.

On conſtruira donc, comme on l'a fait (*fig. 18*). Alors CK ſera la valeur poſitive de x, & CP ſa valeur négative; on portera la première (*fig. 22*) de D en G vers B, & l'autre à l'oppoſite, c'eſt-à-dire, de D en G'.

Nous avons inſiſté ſur les différens cas de cette ſolution, pour faire voir comment une ſeule équation les comprend tous; comment on les en déduit par le ſeul changement des ſignes; comment les poſitions contraires des lignes, ſont déſignées par la contrariété des ſignes, & réciproquement. Il nous reſte encore à indiquer quelques uſages de cette même ſolution.

267. Si l'on propoſoit cette queſtion: *D'un point donné* A (fig. 23) *hors d'un triangle ou dans un triangle donné* DHI, *mener une ligne* AF *qui diviſe ce triangle en deux parties* DEF, EFIH *qui ſoient entre elles dans un rapport connu & marqué par le rapport de* m : n, cette queſtion trouveroit ſa ſolution dans la précédente. Car puiſque le triangle DHI eſt donné, & que l'on ſait quelle partie le triangle DEF doit être du triangle DHI; ſi l'on cherche le quatrième terme de cette proportion $m + n : m ::$ la ſurface du triangle DHI, eſt à un quatrième terme; ce quatrième terme ſera la ſurface que doit avoir le triangle DEF. Or on peut toujours trouver un quarré cc égal à cette ſurface (249); la queſtion eſt donc réduite à mener par le point A, une ligne AEF qui comprenne avec les deux côtés DH, DI, un triangle DEF égal au quarré cc; c'eſt-à-dire, eſt réduite à la queſtion précédente.

268. On voit encore qu'on ramèneroit à la même queſtion, celle de partager une figure rectiligne quelconque (*fig. 24*) par une ligne tirée d'un point quelconque A,

en deux parties *BCFE*, *EFDHK*, qui fussent entre elles dans un rapport donné. En effet, la figure *BCDHK* étant supposée connue, on connoît tous ses angles & tous ses côtés; on connoîtra donc facilement le triangle *BLC* formé par les deux côtés *KB* & *DC* prolongés, puisqu'on connoît dans ce triangle, le côté *BC* & les deux angles *LBC*, *LCB* supplémens des angles connus *CBK* & *BCF*; ainsi on doit regarder la surface du triangle *LBC* comme connue; & puisque celle de *EBCF* doit être une portion déterminée de la surface totale, elle est donc connue aussi; la question est donc réduite à mener une ligne *AEF* qui forme dans l'angle *KLD*, un triangle égal à un quarré connu. Enfin on voit par-là, comment on partageroit cette figure, en un plus grand nombre de parties dont les rapports seroient donnés.

269. Une remarque qu'il est encore à propos de faire, & que nous allons confirmer par d'autres exemples, c'est que, si quelques-unes des quantités données qui entrent dans l'équation qui sert à résoudre une question, sont telles qu'en changeant leurs signes, en signes contraires, l'équation ne change point; ou si un changement de position dans la ligne ou les lignes cherchées de la figure, n'entraîne aucun changement de position ni de grandeur dans les lignes données, alors parmi les différentes valeurs de x, lorsqu'il y en a plusieurs dans l'équation, on en trouvera toujours une qui sera la solution propre pour le cas qu'indique ce changement.

Par exemple, dans la question que nous venons de traiter, on a vu que l'une des valeurs de x donnoit directement la solution pour le cas où la ligne AEG (*fig. 17*) devoit traverser l'angle HDI, ainsi qu'on l'a supposé en faisant le calcul; mais on a vu en même temps que la seconde valeur de x donnoit la solution pour le cas où il s'agiroit non pas de l'angle HDI, mais de son opposé au sommet. La raison en est qu'ayant dans chaque cas, les mêmes quantités données à employer, & les mêmes raisonnemens à faire, on ne peut être conduit qu'à la même équation; donc la même équation doit donner les deux solutions. Nous allons en voir encore des exemples, en parcourant d'autres questions.

270. Proposons-nous cette question. *D'un point donné* A *hors d'un cercle* BDC (fig. 25) *tirer une ligne droite* AE, *de manière que sa partie* DE *interceptée dans le cercle soit égale à une ligne donnée.*

Puisque le cercle $BDEC$ est donné, son diamètre est censé connu; & puisque le point A est donné, si l'on tire par le centre O la droite AOC, on est censé connoître la ligne AB, & par conséquent la ligne AC. Pour savoir comment on doit tirer la ligne AE, il ne s'agit que de savoir de quelle grandeur doit être AD, pour que son prolongement DE soit égal à la ligne donnée. Je nomme donc AD, x; la ligne connue AB, a; la ligne connue AC, b; enfin je nomme c, la ligne donnée à laquelle DE doit être égale. Cela posé,

Puisque la figure $B\ D\ E\ C$ est un cercle, les sécantes AC, AE doivent (*Géom.* 127) être réciproquement proportionnelles à leurs parties extérieures ; on doit donc avoir $AC : AE :: AD : AB$; c'est-à-dire, en vertu des dénominations précédentes, $b : x + c :: x : a$; donc en multipliant les extrêmes & les moyens, on aura $xx + cx = ab$, équation du second degré qui étant résolue donne $x = -\frac{1}{2}c \pm \sqrt{(\frac{1}{4}cc + ab)}$; dont la première valeur, $x = -\frac{1}{2}c + \sqrt{(\frac{1}{4}cc + ab)}$, satisfait seule à la question actuelle.

Pour achever la solution, il faut construire cette quantité, ce qu'on peut faire sans employer les transformations enseignées (246). Pour cet effet, on tirera du point A, la tangente AT qui (*Géom.* 129) étant moyenne proportionnelle entre AB & AC, donnera $(AT)^2 = ab$; la valeur de x deviendra donc $x = -\frac{1}{2}c + \sqrt{[\frac{1}{4}cc + (AT)^2]}$: tirons le rayon TO, il sera perpendiculaire à AT (*Géom.* 48); si donc on prend $TI = \frac{1}{2}c$, alors en tirant AI, on aura $AI = \sqrt{[\frac{1}{4}cc + (AT)^2]}$; donc pour avoir x, il ne s'agit plus que de porter TI de I en R & de décrire du point A comme centre & du rayon AR, l'arc RD qui déterminera le point cherché D; car AD ou AR sera égal à $AI - IR = AI - TI = \sqrt{[\frac{1}{4}c^2 + (AT)^2]} - \frac{1}{2}c = x$.

Pour

Pour connoître maintenant ce que signifie la seconde valeur, $x = -\frac{1}{2}c - \sqrt{(\frac{1}{4}cc + ab)}$, il faut remarquer que puisqu'elle est toute négative, elle ne peut tomber que du côté opposé à celui vers lequel tend *AD*. Voyons donc s'il y a quelque question dépendante des mêmes quantités & des mêmes raisonnemens, & qui ait rapport à ce côté. Or je remarque que si l'on suppose *a* & *b* négatifs, l'équation $xx + cx = ab$ ne change en aucune manière; donc puisqu'alors le cercle *BDEC* deviendroit *B'D'E'C'* situé vers la gauche de la même manière que le premier l'est vers la droite, il s'ensuit que cette même équation renferme aussi la solution qui appartiendroit à ce cas; la seconde valeur de x, savoir $x = -\frac{1}{2}c - \sqrt{(\frac{1}{4}cc + ab)}$ appartient donc à ce même cas, & satisfait à la même condition; c'est pourquoi si dans la construction précédente on porte *IT*, de *I* en *R'*, sur *AI* prolongé, & qu'ensuite du point *A* comme centre & d'un rayon égal à *AR'*, on décrive un arc qui coupe, en *E'*, la circonférence *B'D'E'C'*, le point *E'* sera tel que la partie interceptée *E'D'* sera égale à *c*; en effet, *AE'* étant égal à $AR' = AI + IR'$, vaudra $\sqrt{(\frac{1}{4}c^2 + AT^2)} + \frac{1}{2}c$, c'est-à-dire, sera égal à la seconde valeur de x en y changeant les signes; or puisqu'on porte cette quantité du côté opposé à celui vers lequel on a supposé que tendoit x, il

s'enſuit que AE' eſt véritablement la ſeconde valeur de x.

Au reſte comme les deux cercles ſont égaux & ſitués de la même manière, les deux ſolutions peuvent appartenir toutes deux au même cercle, enſorte que ſi l'on décrit du point A comme centre & du rayon AR', l'arc $R'E$, la ligne AE réſoudra auſſi la queſtion ; en effet il eſt aiſé de voir que le point E déterminé de cette manière eſt ſur le prolongement de la ligne AD déterminée par la première conſtruction. Mais des deux ſolutions diſtinctes que fournit l'Algèbre, la première tombe à la droite du point A, & appartient au point D de la circonférence convexe ; la ſeconde tombe à la gauche, & appartient au point E' de la circonférence concave.

On voit par-là ſe confirmer de plus en plus, que les quantités négatives doivent être portées de côtés oppoſés, & réciproquement.

271. Suppoſons maintenant qu'il s'agit de *trouver ſur la direction de la ligne donnée* AB (fig. 26.) *un point* C *tel que ſa diſtance au point* A, *ſoit moyenne proportionnelle entre ſa diſtance au point* B *& la ligne entière* AB.

Je nommerai a, la ligne donnée AB ; & x, la diſtance cherchée AC ; alors BC ſera $a - x$; &

puisqu'on veut que $AB : AC :: AC : CB$, ou que $a : x :: x : a - x$, il faut, en multipliant les extrêmes & les moyens, que $xx = aa - ax$, ou $xx + ax = aa$, équation du second degré, qui étant résolue, donne $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}aa + aa)}$.

Pour construire la première valeur $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}aa + aa)}$, il faut selon ce qui a été enseigné (249) élever au point B la perpendiculaire $BD = \frac{1}{2}a$, & ayant tiré AD, on aura $AD = \sqrt{[(BD^2)^2 + (AB)^2]} = \sqrt{(\frac{1}{4}aa + aa)}$; il ne s'agit donc plus que de retrancher de cette ligne, la quantité $\frac{1}{2}a$, ce qui se fera en portant DB de D en O; alors AO vaudra $\sqrt{(\frac{1}{4}aa + aa)} - \frac{1}{2}a$, c'est-à-dire, sera égale à x; on portera donc AO de A en C vers B, & le point C où elle aboutira sera le point cherché.

Quant à la seconde valeur de x, savoir $-\frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}aa + aa)}$; si l'on porte BD de D en O' sur le prolongement de AD, alors AO' vaudra $\frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}aa + aa)}$; puis donc que la valeur de x est cette même quantité, prise négativement, on portera AO' de A en C' sur AB prolongée du côté opposé à celui vers lequel on a supposé, dans la solution, que x tendoit, & l'on aura un second point C' qui sera, aussi, tel que sa distance au point A sera moyenne proportionnelle entre sa distance au point B & la ligne entière AB.

Remarquons en passant que cette question renferme celle de *couper une ligne donnée* AB *en moyenne & extrême raison*; aussi la construction que nous venons d'en donner, est-elle la

même que celle que nous avons donnée (*Géom.* 130). Mais on voit que l'Algèbre nous conduit à trouver cette construction ; au lieu qu'en Géométrie nous supposions la construction déjà trouvée, & nous en démontrions seulement la légitimité.

272. Si l'on fait un peu d'attention sur la marche que nous avons observée dans les questions précédentes, on verra que nous avons toujours pris, pour l'inconnue, une ligne qui étant une fois connue serviroit à déterminer toutes les autres, en observant les conditions de la question. C'est ce qu'on doit toujours observer ; mais il y a encore un choix à faire pour se déterminer sur cette ligne : il y en a souvent plusieurs dont chacune auroit également la propriété de déterminer toutes les autres si une fois elle étoit connue ; or parmi celles-là il en est qui conduiroient à des équations plus composées les unes que les autres. Pour aider à se déterminer dans ces cas, nous placerons ici la règle suivante.

273. *Si parmi les lignes ou les quantités qui étant prises chacune pour l'inconnue, pourroient servir à déterminer toutes les autres quantités, il s'en trouve deux qui y servent de la même manière, ensorte qu'on prévoie que l'une ou l'autre conduiroit à la même équation (aux signes + ou — près) ; alors, on fera bien de n'employer ni l'une ni l'autre, mais de prendre pour inconnue une autre quantité qui dépende également de l'une & de l'autre de ces deux-là ;* par exemple, de prendre

pour inconnue leur demi-somme, ou leur demi-différence, ou un moyen proportionnel entre elles, ou &c. On arrivera toujours à une équation plus simple qu'en cherchant l'une ou l'autre.

La question que nous avons résolue (270) peut nous en fournir un exemple. Rien dans cette question ne déterminoit à prendre AD (*fig.* 25) pour inconnue plutôt que AE; en prenant AD pour l'inconnue x, on avoit $x + c$ pour AE; & en prenant AE pour l'inconnue x, on auroit eu $x - c$ pour AD, & du reste le calcul est le même dans chaque cas, ensorte que l'équation ne différera que par les signes. C'est pourquoi, si au lieu de prendre aucune des deux pour inconnue, je prends leur demi-somme, & que je la nomme $2x$; comme leur différence DE est donnée, par les conditions de la question, & est $= c$, on aura (*Géom.* 301) $AE = x + \frac{1}{2}c$, & $AD = x - \frac{1}{2}c$; & en employant le même principe que nous avons employé dans cette première résolution, nous aurons l'équation $(x + \frac{1}{2}c)(x - \frac{1}{2}c) = ab$, ou $xx - \frac{1}{4}cc = ab$, équation plus simple & qui donne $x = \sqrt{(\frac{1}{4}cc + ab)}$. D'où il est aisé de conclure que AE qui est $x + \frac{1}{2}c$, sera $= \frac{1}{2}c + \sqrt{(\frac{1}{4}cc + ab)}$, & $AD = -\frac{1}{2}c + \sqrt{(\frac{1}{4}cc + ab)}$, comme ci-dessus (270).

La question suivante nous fournira plusieurs exemples de l'application du même principe.

274. *D'un point* D (fig. 27) *situé dans l'angle droit* IAE, *& également éloigné des deux côtés* IA *&* AE, *mener une ligne droite* DB, *de manière que la partie* CB *comprise dans l'angle droit* EAB, *soit égale à une ligne donnée.*

Ayant abaissé les perpendiculaires DE, DI, je puis indifféremment prendre pour inconnue CE ou AB, AC ou IB, CD ou DB. Si je prends, par exemple, CE pour l'inconnue, alors nommant CE, x; & désignant par a, chacune des deux lignes égales DE, DI qui sont censées connues; nommant de plus, c, la ligne donnée à laquelle BC doit être égale, j'aurai $AC = AE - CE = a - x$; & les triangles semblables DEC, CAB, me donneront AB par cette proportion, $CE : DE :: AC : AB$; c'est-à-dire, $x : a :: a - x : AB$; d'où l'on tire $AB = \frac{aa - ax}{x}$. Or par la propriété du triangle rectangle (*Géom.* 164) on a $\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$: substituant, au lieu de ces lignes, leurs valeurs algébriques, on aura $(a - x)^2 + \left(\frac{aa - ax}{x}\right)^2 = cc$, ou $aa - 2ax + xx + \frac{a^4 - 2a^3x + a^2x^2}{xx} = cc$, ou, en chassant le dénominateur, transposant & réduisant $x^4 - 2ax^3 +$

$2aaxx - ccxx - 2a^3x + a^4 = 0$; équation du quatrième degré, mais qui n'eſt pas, à beaucoup près, la plus ſimple qu'on puiſſe employer pour réſoudre cette queſtion.

Si, au lieu de prendre CE pour inconnue, nous prenions IB, alors nommant IB, x, & imitant la ſolution précédente, on auroit une équation qui ne différeroit de celle qu'on vient de trouver, qu'en ce qu'au lieu de $a - x$, on auroit $x - a$; c'eſt-à-dire, qui feroit abſolument la même, puiſque ces quantités y ſont au quarré. Celle où l'on prendroit AB pour inconnue, ne différeroit que par les ſignes de celle où l'on prendroit AC pour inconnue. A l'égard de DB & de DC, l'équation où l'une ſera priſe pour inconnue, ne différera que par les ſignes, de celle où l'on prendroit l'autre pour inconnue : il ne faut donc prendre aucune de ces lignes.

Mais ſi nous prenons pour inconnue, la ſomme des deux lignes DB & DC, & ſi nous repréſentons cette ſomme, par $2x$, alors (*Géom.* 301) nous aurons $DB = x + \frac{1}{2}c$, & $DC = x - \frac{1}{2}c$; or les parallèles DI & CA, nous donnent, pour trouver AB & AC, les deux proportions ſuivantes, $DC : CB :: IA$ ou $DE : AB$, & $DB : CB :: DI : AC$; c'eſt-à-dire, $x - \frac{1}{2}c : c :: a : AB$, & $x + \frac{1}{2}c : c :: a : AC$; donc $AB = \frac{ac}{x - \frac{1}{2}c}$ & $AC = \frac{ac}{x + \frac{1}{2}c}$; donc

puisque le triangle rectangle CAB, donne $(AB)^2 + (AC)^2 = (BC)^2$, on aura $\frac{a^2c^2}{(x-\frac{1}{2}c)^2} + \frac{a^2c^2}{(x+\frac{1}{2}c)^2} = cc$; ou bien, chassant les fractions, & divisant par cc, $a^2(x+\frac{1}{2}c)^2 + a^2(x-\frac{1}{2}c)^2 = (x+\frac{1}{2}c)^2(x-\frac{1}{2}c)^2$; faisant les opérations indiquées, transposant & réduisant, on a $x^4 - (\frac{1}{2}cc + 2aa)x^2 = \frac{1}{2}aacc - \frac{1}{16}c^4$, équation du quatrième degré, à la vérité, mais plus facile à résoudre que la précédente, puisque (173) elle se résout à la manière de celles du second degré.

On parviendra encore à des équations assez simples, si on emploie deux inconnues, dont l'une soit la somme des deux lignes AB & AC, & l'autre leur différence, c'est-à-dire, si l'on fait $AB + AC = 2x$, & $AB - AC = 2y$, ce qui donnera $AB = x + y$, & $AC = x - y$; le triangle rectangle ABC donnera $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$, & les triangles semblables ABC, IBD donneront (*Géom.* 109) $AB : AC :: IB : ID$; ce qui donnera les deux équations nécessaires pour déterminer x & y; de l'une on tirera la valeur de xx, qui étant substituée dans l'autre, donnera pour y, une équation du second degré. Mais nous laissons aux Commençans à achever ce calcul pour s'exercer, & nous revenons à notre équation.

Conformément à ce qui a été enseigné (173), on aura $x^4 - (\frac{1}{2}cc + 2aa)x^2 + (\frac{1}{4}cc + aa)^2 =$

$(\frac{1}{4}cc+aa)^2+\frac{1}{2}aacc-\frac{1}{16}c^4=aacc+a^4$; tirant la racine quarrée, $x^2-(\frac{1}{4}cc+aa)=\pm\sqrt{aacc+a^4}$, & par conséquent $x^2=\frac{1}{4}cc+aa\pm\sqrt{aacc+a^4}$: tirant de nouveau la racine quarrée, nous aurons enfin $x=\pm\sqrt{[\frac{1}{4}cc+aa\pm\sqrt{(aacc+a^4)}]}$ ou $x=\pm\sqrt{[\frac{1}{4}cc+aa\pm a\sqrt{(cc+aa)}]}$.

Des quatre valeurs de x que donne la double combinaison des deux signes $\pm$, il n'y en a qu'une qui appartienne à la question telle qu'elle a été proposée, & cette valeur est $x=+\sqrt{[\frac{1}{4}cc+aa+a\sqrt{(cc+aa)}]}$.

La valeur $x=+\sqrt{[\frac{1}{4}cc+aa-a\sqrt{(cc+aa)}]}$ résout la question pour le cas où l'on demanderoit que la ligne CB fût dans le même angle que le point D, voyez (*fig.* 28); & alors x représente, non pas la demi-somme, mais la demi-différence des deux lignes BD & DC; c'est ce dont il est facile de se convaincre en nommant $2x$ cette différence, & résolvant le problême de la même manière que ci-dessus; car on aura $DB=\frac{1}{2}c+x$, $CD=\frac{1}{2}c-x$, & les parallèles DI & CA donneront $DB:CB::DI:CA$, & $DC:CB::AI:AB$, ou $\frac{1}{2}c+x:c::a:CA$, & $\frac{1}{2}c-x:c::a:AB$; donc $CA=\frac{ac}{\frac{1}{2}c+x}$ & $AB=\frac{ac}{\frac{1}{2}c-x}$; donc à cause du triangle rectangle CAB, on aura $\frac{a^2c^2}{(\frac{1}{2}c+x)^2}+\frac{a^2c^2}{(\frac{1}{2}c-x)^2}=c^2$, ou après

les mêmes opérations que ci-dessus, $x^4 - (\frac{1}{2}cc + 2aa)x^2 = \frac{1}{2}aacc - \frac{1}{16}c^4$, équation qui est absolument la même que celle que nous venons de trouver pour la somme des deux lignes *BD* & *CD* (*fig.* 27). Donc la même équation satisfaisant aux deux cas, l'une des racines doit donner la somme, & une autre doit donner la différence; or il est facile de voir que les deux que l'on doit prendre, sont celles que nous venons d'indiquer, puisque les deux autres racines, étant toutes négatives, ne peuvent appartenir qu'à des cas tout opposés à ceux qu'on a considérés dans chaque résolution.

Quant à ces deux autres racines, pour trouver à quels cas elles appartiennent, il faut observer que rien ne détermine dans la question présente, ou du moins, dans l'équation, si le point *D* (*fig.* 27) est (comme on l'a supposé d'abord) au-dessous de *AI* & à gauche de *AE*, ou s'il est, au contraire, au-dessus de la première & à droite de la seconde, comme on le voit ici à l'égard de *A'I'* & de *A'E'*; or dans ce cas, la quantité *a* tombant de côtés opposés à ceux où elle tomboit d'abord, est négative; donc on aura la solution qui convient à ce cas, si l'on met $-a$ au lieu de $+a$ dans l'équation $x^4 - (\frac{1}{2}cc + 2aa)x^2$, &c. trouvée ci-dessus; mais comme cette équation ne change pas alors, il s'en suit que cette même équation doit aussi résoudre ces deux nouveaux cas. Donc les deux autres valeurs de x sont l'une, la somme des deux lignes *DB'* *DC'* (*fig.* 27), & l'autre, leur différence (*fig.* 28). Et l'on voit en effet

que dans cette nouvelle position, les points B & C tombent de côtés opposés à ceux où ils tomboient d'abord, & que par conséquent la somme, ainsi que la différence des deux lignes DB' & DC' doit être négative, comme l'équation les donne en effet.

Pour construire la solution qu'on vient de trouver, on prendra sur EA prolongée (*fig.* 27 & 28), la partie $AN = c$, & ayant tiré IN, on portera cette dernière sur DI prolongée de I en K: sur DK comme diamètre, on décrira le demi-cercle KLD rencontré en L par AI prolongée. Du milieu H de AN on tirera IH que l'on portera de I en M (*fig.* 27), & on aura LM pour la première valeur de x; mais dans la figure 28, on décrira du point L comme centre, & d'un rayon égal à IH, un petit arc qui coupe IK en M, & IM sera la seconde valeur de x; & puisqu'on a $BD = x + \frac{1}{2}c$, on aura $BD = LM + AH$ (*fig.* 27), & $BD = IM + AH$ (*fig.* 28); ainsi il n'y aura plus qu'à décrire du point D comme centre, & du rayon BD qu'on vient de déterminer, un arc qui coupe IA prolongée en quelque point B, la droite DB sera telle qu'on la demande. En effet, le triangle rectangle IAN (*fig.* 27 & 28) donne IN ou $IK = \sqrt{(IA^2 + AN^2)} = \sqrt{(aa + cc)}$, & puisque LI est moyenne proportionnelle entre DI & IK, on a $IL^2 = DI \times IK = a\sqrt{(aa + cc)}$, or le

triangle rectangle IAH donne IH ou $MI =$ $\sqrt{(IA^2 + AH^2)} = \sqrt{(aa + \frac{1}{4}cc)}$ & le triangle rectangle LIM donne (*figure 27*) $LM =$ $\sqrt{(MI^2 + IL^2)} = \sqrt{[aa + \frac{1}{4}cc + a\sqrt{(aa+cc)}]}$ $= x$; & (*fig. 28*) $IM = \sqrt{(LM^2 - IL^2)} =$ $\sqrt{[aa + \frac{1}{4}cc - a\sqrt{(aa+cc)}]} = x$.

Il faut remarquer au ſujet de cette dernière valeur, que la conſtruction que nous venons d'en donner, ſuppoſe que IH (*fig. 28*) eſt plus grand que LI, ou tout au plus égal. S'il étoit plus petit, la queſtion ſeroit impoſſible pour ce dernier cas; c'eſt ce que fait voir auſſi l'Algèbre; car dans la valeur $x = \sqrt{[aa + \frac{1}{4}cc - a\sqrt{(aa+cc)}]}$, ſi $aa + \frac{1}{4}cc$, qui eſt $(IH)^2$, eſt plus petit que $a\sqrt{(aa+cc)}$ qui eſt $(IL)^2$, la quantité que couvre le radical ſupérieur, ſera négative, & par conſéquent la valeur de x ſera imaginaire.

En prenant pour inconnue la ſomme des deux lignes DB & DC (*fig. 27*) ou leur différence (*fig. 28*) nous ſommes arrivés à une équation plus ſimple qu'en prenant CE, ou AC, ou AB, ou IB, parce que la relation des lignes DB & DC aux lignes IB & AB eſt ſemblable à celle que les mêmes lignes DB & DC ont avec les lignes AC & CE, c'eſt-à-dire, qu'elles peuvent être déterminées par des opérations ſemblables en employant

IB & *AB*, ou *AC* & *CE*. En général, comme l'équation doit renfermer tous les différens rapports que la quantité cherchée peut avoir avec celles dont elle dépend, cette équation sera toujours d'autant plus simple que la quantité qu'on choisira pour inconnue, aura moins de rapports différens avec les autres; en voici un exemple bien sensible dans cette autre solution de la même question.

275. Puisque l'angle *CAB* (*fig.* 29) est droit, si l'on conçoit que sur *CB* comme diamètre on décrive un cercle, il passera par le point *A* : tirons la ligne *DA* qui prolongée rencontre la circonférence en *M*; alors il est aisé de voir que puisque les lignes *DI* & *DE* sont égales l'angle *DAI* ou son égal *BAM* sera de 45 degrés; & puisque ce dernier a pour mesure la moitié de l'arc *MB* (*Géom.* 63), cet arc *MB* sera donc de 90°; donc si l'on tire le rayon *LM*, le triangle *DLM* sera rectangle, & par conséquent en abaissant sur *DM*, la perpendiculaire *LN*, le côté *LM* (*Géom.* 112) sera moyen proportionnel entre *DM* & *MN*, ou entre *DM* & *AN*, puisque la perpendiculaire *LN* rend $AN = NM$ (*Géom.* 52). De-là il est aisé d'avoir une solution très-simple, en prenant *AN* pour inconnue.

Représentons par x cette ligne *AN*, & nommons

d la ligne DA qui eſt cenſée connue ; alors DM ſera $d+2x$, & puiſqu'on a (ſelon ce qui vient d'être remarqué) $DM : LM :: LM : MN$, on aura $d+2x : \frac{1}{2}c :: \frac{1}{2}c : x$, & par conſéquent $dx + 2xx = \frac{1}{4}cc$, ou $xx + \frac{1}{2}dx = \frac{1}{8}cc$; & en réſolvant cette équation, $x = -\frac{1}{4}d \pm \sqrt{(\frac{1}{16}dd + \frac{1}{8}cc)}$.

Pour conſtruire cette quantité, je l'écris ainſi $x = -\frac{1}{4}d \pm \sqrt{(\frac{1}{16}dd + \frac{1}{16}cc + \frac{1}{16}cc)}$. Je prends ſur les côtés Ao, AI de l'angle droit IAo, les parties Am, An égales chacune à $\frac{1}{4}c$, & achevant le quarré $Ampn$, je tire la diagonale Ap qui ſera perpendiculaire à DA, & égale à $\sqrt{(\frac{1}{16}cc + \frac{1}{16}cc)}$: je prends ſur AD, la partie Ar égale à $\frac{1}{4}d$ ou $\frac{1}{4}AD$, & tirant pr, j'ai $pr = \sqrt{[Ar^2 + (Ap)^2]} = \sqrt{(\frac{1}{16}dd + \frac{1}{16}cc + \frac{1}{16}cc)}$; il ne s'agit donc plus, pour avoir la première valeur de x, que de retrancher de pr la quantité $\frac{1}{4}d$, ce qui ſe fera en décrivant du point r comme centre, & du rayon rp un arc qui coupe DM en N, ce qui donne AN pour la première valeur de x; enſorte qu'élevant au point N la perpendiculaire NL que l'on coupera en L par un arc décrit du point A comme centre, & du rayon $\frac{1}{2}c$, on aura le point L par lequel & par le point D tirant DCB, on aura la ſolution.

Quant à la ſeconde valeur de x, ſavoir $x =$

$-\frac{1}{4}d - \sqrt{(\frac{1}{16}dd + \frac{1}{16}c^2 + \frac{1}{16}c^2)}$, on l'aura en portant rp de r en N', car alors AN' étant égale à $Ar + rN'$ vaudra $\frac{1}{4}d + \sqrt{(\frac{1}{16}dd + \frac{1}{16}c^2 + \frac{1}{16}c^2)}$, c'eſt-à-dire, ſera égale à la ſeconde valeur de x en changeant les ſignes; & comme elle tombe du côté oppoſé à la première, elle ſera, eu égard à tout, la véritable valeur de x dans ce ſecond cas. On élevera donc auſſi au point N' la perpendiculaire $N'L'$ que l'on coupera en L' par un arc décrit pareillement du point A comme centre & d'un rayon égal à $\frac{1}{2}c$; alors tirant par le point L' & par le point D la droite $B'L'D$, on aura la ſeconde ſolution dont la queſtion peut être ſuſceptible : c'eſt ce dont il eſt aiſé de ſe convaincre en jettant les yeux ſur la figure 30, & y appliquant mot à mot ce que nous avons dit de la figure 29 au commencement de cette ſolution : on verra qu'en nommant AN ou MN, x, & conſervant les autres dénominations les mêmes, on aura $DM : ML :: ML : MN$; c'eſt-à-dire, $2x - d : \frac{1}{2}c :: \frac{1}{2}c : x$, & par conſéquent, $2xx - dx = \frac{1}{4}cc$; d'où l'on tire $x = \frac{1}{4}d \pm \sqrt{(\frac{1}{16}dd + \frac{1}{16}cc + \frac{1}{16}cc)}$ dont une des valeurs eſt préciſément la même que celle dont il s'agit; les ſignes ſeulement ſont différens, ainſi que cela doit être.

Mais il ſe préſente ici une remarque importante à faire. Il peut arriver que l'arc que l'on voudra

décrire du point A (*fig.* 29) comme centre, & du rayon $\frac{1}{2}c$, ne rencontre pas la perpendiculaire $N'L'$, parce que la quantité $\frac{1}{2}c$ peut être plus petite que AN'. Or nous avons dit que lorsque les questions du second degré étoient impossibles, l'Algèbre le faisoit connoître : cependant, dans l'équation $x = -\frac{1}{4}d - \sqrt{(\frac{1}{16}dd + \frac{1}{16}c^2 + \frac{1}{16}c^2)}$, rien ne manifeste dans quels cas cette impossibilité a lieu; car tout est nécessairement positif sous le radical.

Voici la solution de cette difficulté. Il est incontestable que lorsqu'une question exprimée algébriquement, sera impossible, l'Algèbre manifestera cette impossibilité; mais il faut bien faire attention que ce sera lorsqu'on aura exprimé par cette même Algèbre, tout ce que la question suppose, soit explicitement, soit implicitement; or c'est précisément ce qui n'a pas lieu ici. En effet, la question suppose tacitement que les trois points D, A, L, ne sont pas sur une même ligne droite, & c'est ce que nous n'avons point exprimé algébriquement; nous avons exprimé que LM étoit moyenne proportionnelle entre DM & NM, propriété qui appartient à la vérité au triangle rectangle, mais qui peut avoir lieu aussi lorsque les trois points D, A, L sont supposés en ligne droite. En effet, il est évident qu'on peut se proposer cette question : *Trouver*

sur

ſur la direction DL (fig. 31), *quel intervalle il faudroit laiſſer entre les deux droites* DA & ML *de grandeurs connues, pour que* ML *ſoit moyenne proportionnelle entre* DM & MN, *le point* N *étant le milieu de* AM. Or cette queſtion conduit (comme il eſt facile de s'en aſſurer) préciſément à la même équation que ci-deſſus, & cette équation donne deux ſolutions, l'une pour le cas où les deux points *A* & *M* ſont entre *D* & *L*; l'autre, pour le cas contraire. Il n'eſt donc pas étonnant que lorſque la première queſtion devient impoſſible (du moins dans un de ces cas) l'Algèbre n'en diſe rien; puiſqu'elle doit donner la ſolution de cette ſeconde queſtion qui eſt toujours poſſible.

276. Cette réflexion nous porte donc à diſtinguer deux ſortes de queſtions, ſavoir, les queſtions *concrètes* & les queſtions *abſtraites*. Par les premières, on doit entendre les queſtions de la nature de l'avant-dernière, où ce que l'on cherche eſt ſpécifié ou particulariſé par quelque condition, quelque propriété, ou quelque conſtruction particulière, que l'équation n'exprime point. Les queſtions abſtraites, au contraire, ſeront celles où les quantités ſont conſidérées uniquement comme quantités, & où l'équation exprime tout ce que la queſtion renferme, comme dans la dernière queſtion. Celles-ci peuvent toujours

avoir autant de ſolutions, ſoit poſitives, ſoit négatives, que l'équation a de ſolutions réelles : au lieu que le nombre des ſolutions d'une queſtion concrète eſt ſouvent moindre que le nombre des ſolutions, même poſitives, de l'équation; la queſtion ſuivante qui eſt de cette dernière eſpèce, nous en fournira un exemple.

277. Suppoſons que *ABED* (*fig.* 32) repréſente une ſphère engendrée par la rotation du demi-cercle *ABE* autour du diamètre *AE*. Le ſecteur *ABC*, dans ce mouvement, engendre un ſecteur ſphérique qui eſt compoſé d'un ſegment ſphérique engendré par la rotation du demi-ſegment *ABP*, & d'un cône engendré par le triangle rectangle *BPC*. Suppoſons qu'on demande en quel endroit le ſegment ſphérique & le cône feront égaux entre eux.

Pour réſoudre cette queſtion, il faut ſe rappeler (*Géom.* 247) que le ſecteur ſphérique eſt égal au produit de la ſurface de la calotte *BAD* par le tiers du rayon *AC*. Or la ſurface de la calotte (*Géom.* 225) ſe trouve en mulipliant la circonférence *ABED* par la hauteur *AP* de cette calotte. Donc ſi on repréſente par le rapport de $r : c$, le rapport du rayon d'un cercle à ſa circonférence, & ſi l'on nomme *AC*, a; *AP*, x; on aura la circonférence *ABDE* par cette proportion $r : c :: a :$ *ABDE* qui ſera donc $\frac{ca}{r}$; donc la ſurface de

la calotte sera $\frac{cax}{r}$, & par conséquent, la solidité du secteur sera $\frac{cax}{r} \times \frac{1}{3}a$ ou $\frac{caax}{3r}$.

Pour avoir la solidité du cône, il faut multiplier la surface du cercle qui lui sert de base, c'est-à-dire, la surface du cercle qui a pour rayon BP, par le tiers de la hauteur CP: or puisque $CP = CA - AP = a - x$, & que $CB = a$, on aura dans le triangle rectangle BPC, $BP = \sqrt{(CB^2 - PC^2)} = \sqrt{(aa - aa + 2ax - xx)} = \sqrt{(2ax - xx)}$; mais pour avoir la surface du cercle qui a pour rayon BP, il faut multiplier sa circonférence par la moitié du rayon, & pour avoir cette circonférence, il faut calculer le quatrième terme de cette proportion $r : c :: \sqrt{(2ax - xx)}$ est à un quatrième terme qui sera $\frac{c\sqrt{(2ax - xx)}}{r}$; multipliant donc par la moitié du rayon $\sqrt{(2ax - xx)}$, on aura $\frac{c.(2ax - xx)}{2r}$ pour la surface de la base du cône, multipliant cette surface par le tiers de la hauteur CP, c'est-à-dire, par $\frac{a-x}{3}$, on aura $\frac{c.(2ax - xx)}{2r} \times \frac{a-x}{3}$ pour la solidité du cône; or pour que le cône soit égal au segment, il faut que le secteur qui est la somme des deux, soit double de l'un ou de l'autre, il faut donc que $\frac{caax}{3r} = 2c \times \frac{2ax - xx}{2r} \times \frac{a-x}{3}$, ou $\frac{caax}{3r} = \frac{c.(2ax - xx).(a-x)}{3r}$, en supprimant 2, facteur commun du numérateur &

du dénominateur ; telle eſt l'équation qui réſoudra la queſtion. On peut ſimplifier cette équation en ſupprimant $3r$, qui eſt diviſeur commun, & cx qui eſt multiplicateur commun des deux membres ; alors on aura $aa=(2a-x).(a-x)$, ou $xx-3ax=-aa$; d'où l'on tire, ſelon les règles de la première ſection, $x=\frac{3}{2}a\pm\sqrt{(\frac{5}{4}aa)}$; or de ces deux ſolutions, il n'y a que $x=\frac{3}{2}a-\sqrt{(\frac{5}{4}aa)}$ qui puiſſe ſatisfaire, puiſqu'il eſt évident que $x=\frac{3}{2}a+\sqrt{(\frac{5}{4}aa)}$ valant plus que $2a$, c'eſt-à-dire, plus que le diamètre, la ſolution qu'elle indique ne peut convenir à la ſphère.

Si l'on veut conſtruire la ſolution $x=\frac{3}{2}a-\sqrt{(\frac{5}{4}aa)}$, on lui donnera cette forme $x=\frac{3}{2}a-\sqrt{(\frac{9}{4}aa-aa)}$; & ayant pris $AM=\frac{3}{2}a$, on décrira ſur AM comme diamètre le demi-cercle AOM, & ayant inſcrit la corde AO égale à a, on tirera OM que l'on portera de M en P vers A; le point P où elle aboutira, déterminera la hauteur AP ou x. En effet, à cauſe du triangle rectangle AOM, on a OM ou $PM=\sqrt{(AM^2-AO^2)}=\sqrt{(\frac{9}{4}aa-aa)}$; donc $AP=AM-PM=\frac{3}{2}a-\sqrt{(\frac{9}{4}aa-aa)}=x$.

Quant à la ſeconde ſolution $x=\frac{3}{2}a+\sqrt{(\frac{5}{4}aa)}$, elle n'appartient point, ainſi que nous venons de le dire, à la queſtion préſente ; mais elle appartient, ainſi que la première, à cette autre queſtion abſtraite

que la lecture de l'équation $xx - 3ax = -aa$, ou $3ax - xx = aa$, fournit : *La ligne connue* AN (fig. 33) *étant partagée en trois parties égales aux points* B & D, *trouver sur la direction de cette ligne un point* P, *tel que la partie* AD *soit moyenne proportionnelle entre les distances du point* P *aux extrémités* A & N. En effet, si l'on nomme a le tiers AD de la ligne connue AN, & AP, x, on aura $PN = 3a - x$; & les conditions de la question donnent cette proportion $x : a :: a : 3a - x$, d'où l'on tire cette équation $3ax - xx = aa$, dont les deux racines sont $x = \frac{3}{2}a \pm \sqrt{(\frac{5}{4}aa)}$ comme ci-dessus ; on les aura toutes deux aussi par la même construction, excepté que pour la seconde, c'est-à-dire, pour $x = \frac{3}{2}a + \sqrt{(\frac{5}{4}aa)}$, on portera MO de M en P' vers N, & alors AP & AP' seront les deux valeurs de x.

Autres applications de l'Algèbre, à divers objets.

278. Pour résoudre la dernière question, nous avons été obligés de calculer l'expression algébrique d'un secteur sphérique & du cône qui en fait partie. Les corps que nous avons considérés en Géométrie, reviennent souvent dans plusieurs questions, & principalement dans les questions Physico-mathématiques, parce qu'ils sont les élémens de tous les autres. Il est

donc à propos de se familiariser avec les expressions algébriques, soit de leur totalité, soit de leurs parties. Outre que cela sera utile dans la quatrième partie de ce Cours, cela nous fournira encore l'occasion de faire voir l'utilité de l'Algèbre pour la comparaison de ces corps, & pour la mesure de ceux qu'on peut y rapporter.

Si l'on représente en général par $r : c$ le rapport du rayon à la circonférence d'un cercle [rapport que l'on connoît avec une exactitude plus que suffisante (*Géom.* 152) pour la pratique] ; alors la circonférence de tout autre cercle dont le rayon feroit a, sera $\frac{ca}{r}$, & sa surface $\frac{ca}{r} \times \frac{1}{2} a$, ou $\frac{ca^2}{2r}$.

On voit par-là que les surfaces des cercles croissent comme les quarrés de leurs rayons ; car $\frac{c}{2r}$ étant toujours de même valeur, la quantité $\frac{ca^2}{2r}$ ne croît qu'à proportion de ce que croît a^2.

Si h est la hauteur d'un cylindre dont le rayon de la base est a, on aura (*Géom.* 237) $\frac{ca^2}{2r} \times h$ pour sa solidité ; par la même raison, on aura $\frac{ca'^2}{2r} \times h'$, pour la solidité d'un autre cylindre dont la hauteur seroit h' & dont le rayon de la base seroit a' ; ensorte que les solidités de ces deux cylindres seront entre elles :: $\frac{ca^2}{2r} \times h : \frac{ca'^2}{2r} \times h'$,

ou :: $a^2h : a'^2h'$, en ſupprimant le facteur commun $\frac{c}{2r}$; c'eſt-à-dire, que les ſolidités des cylindres ſont comme les produits de leurs hauteurs par les quarrés des rayons de leurs baſes. Si les hauteurs ſont proportionnelles aux rayons des baſes, alors on a $h : h' :: a : a'$, & par conſéquent $h' = \frac{ha'}{a}$; & le rapport $a^2h : a'^2h'$ devient $a^2h : \frac{a'^3h}{a}$, ou, (en ſupprimant le facteur commun h, multipliant par a, & ſupprimant le dénominateur a) devient $a^3 : a'^3$; c'eſt-à-dire, qu'alors les ſolidités ſont comme les cubes des rayons des baſes.

En général les ſurfaces, comme nous l'avons vu en Géométrie, dépendent du produit de deux dimenſions, & les ſolides du produit de trois dimenſions ; ainſi ſi chaque dimenſion de l'un de deux ſolides ou de deux ſurfaces que l'on compare, eſt à chaque dimenſion de l'autre, dans le même rapport, ces deux ſurfaces ſeront entre elles comme les quarrés, & ces deux ſolides ſeront comme les cubes de deux dimenſions homologues; & plus généralement encore, ſi deux quantités quelconques de même nature ſont exprimées par le produit de tant de facteurs qu'on voudra, & ſi chaque facteur de l'une eſt à chaque facteur de l'autre, dans un même rapport, ces deux quantités ſeront entre elles

comme un facteur homologue de chacune, élevé à une puissance d'un degré égal au nombre de ces facteurs. Par exemple, si une quantité est exprimée par $abcd$ & une autre par $a'b'c'd'$, auquel cas ces deux quantités sont l'une à l'autre :: $abcd : a'b'c'd'$, alors si l'on a $a : a' :: b : b' :: c : c' :: d : d'$, on tirera des proportions que donnent ces rapports, $b' = \frac{a'b}{a}$, $c' = \frac{a'c}{a}$, $d' = \frac{a'd}{a}$, & par conséquent le rapport $abcd : a'b'c'd'$ deviendra $abcd : \frac{a'^4bcd}{a^3}$, ou $a : \frac{a'^4}{a^3}$, ou $a^4 : a'^4$.

La même chose auroit lieu, quand même ces quantités ne seroient pas exprimées par des monomes; si, par exemple, elles étoient exprimées, l'une par $ab + cd$, & l'autre par $a'b' + c'd'$, dans le cas où les dimensions de la première seront proportionnelles aux dimensions de la seconde, ces quantités seront l'une à l'autre :: $a^2 : a'^2$; en effet, puisqu'on suppose que $a : a' :: b : b' :: c : c' :: d : d'$, on aura $b' = \frac{a'b}{a}$, $c' = \frac{a'c}{a}$, $d' = \frac{a'd}{a}$, & par conséquent le rapport $ab + cd : a'b' + c'd'$ deviendra $ab + cd : \frac{a'^2b}{a} + \frac{a'^2cd}{a^2}$, ou $ab + cd : \frac{a'^2ab + a'^2cd}{a^2}$, ou $a^2(ab + cd) : a'^2(ab + cd)$, ou enfin $a^2 : a'^2$.

Cette dernière observation démontre d'une manière générale, que les surfaces des figures semblables sont

comme les quarrés de deux de leurs dimenſions homologues, & les ſolidités des ſolides ſemblables comme les cubes; car quelles que ſoient ces figures ou ces ſolides, les premières peuvent toujours être conſidérées comme compoſées de triangles ſemblables dont les hauteurs & les baſes ſont proportionnelles dans chaque figure; & les derniers peuvent être conſidérés comme compoſés de pyramides ſemblables dont les trois dimenſions ſont auſſi proportionnelles.

On voit par-là comment on peut comparer facilement les quantités, lorſqu'on en a l'expreſſion algébrique, & cela, ſoit que ces quantités ſoient de même eſpèce ou d'eſpèce différente comme un cône & une ſphère, un priſme & un cylindre, pourvu ſeulement qu'elles ſoient de même nature, c'eſt-à-dire, ou toutes deux des ſolides, ou toutes deux des ſurfaces, ou toutes deux, &c.

279. Nous avons dit (*Géom.* 243) comment on devoit s'y prendre pour avoir la ſolidité d'une pyramide tronquée ou d'un cône tronqué. Si donc on nomme h la hauteur de la pyramide entière, & h' la hauteur de la pyramide retranchée; s la ſurface de la baſe inférieure, & s' celle de la baſe ſupérieure, on aura (*Géom.* 202) $s : s' :: h^2 : h'^2$; & par conſéquent $h'^2 = \frac{h^2 s'}{s}$ ou $h' = h \sqrt{\frac{s'}{s}}$; mais ſi on nomme k la hauteur du tronc, on aura $k = h - h'$, & par conſéquent $k = h - h \sqrt{\frac{s'}{s}}$ ou $k = \frac{h\sqrt{s} - h\sqrt{s'}}{\sqrt{s}}$;

d'où l'on tire $h = \frac{k\sqrt{s}}{\sqrt{s}-\sqrt{s'}}$. Or la solidité de la pyramide totale est $s \times \frac{h}{3}$, & celle de la pyramide retranchée est $s' \times \frac{h'}{3}$, ou (en mettant pour h' la valeur qu'on vient de trouver) $s' \times \frac{h}{3} \sqrt{\frac{s'}{s}}$; donc la solidité du tronc sera $\frac{hs}{3} - \frac{hs'\sqrt{s'}}{3\sqrt{s}}$ ou $\frac{h}{3} . \left(s - \frac{s'\sqrt{s'}}{\sqrt{s}}\right)$, ou enfin $\frac{h}{3} . \left(\frac{s\sqrt{s}-s'\sqrt{s'}}{\sqrt{s}}\right)$; mettons donc pour h la valeur que nous venons de trouver, & nous aurons $\frac{k\sqrt{s}}{3(\sqrt{s}-\sqrt{s'})} \times \frac{(s\sqrt{s}-s'\sqrt{s'})}{\sqrt{s}}$, qui se réduit à $\frac{k}{3}\left(\frac{s\sqrt{s}-s'\sqrt{s'}}{\sqrt{s}-\sqrt{s'}}\right)$, ou, en faisant la division par $\sqrt{s}-\sqrt{s'}$, se réduit à $\frac{k}{3} \times (s + \sqrt{ss'} + s')$, qui nous apprend que toute pyramide ou tout cône tronqué est composé de trois pyramides de même hauteur, dont l'une a pour base la base inférieure s du tronc, l'autre la base supérieure s' & la troisième, une moyenne proportionnelle $\sqrt{ss'}$, entre la base supérieure s' & la base inférieure s; car pour avoir la solidité de ces trois pyramides, il suffiroit, puisqu'elles sont de même hauteur, de réunir les trois bases, ce qui donneroit $s + \sqrt{ss'} + s'$, & de multiplier la totalité par le tiers $\frac{k}{3}$ de la hauteur commune, ce qui donne la même quantité qu'on vient de trouver.

280. Si a représente le rayon d'une sphère, $\frac{ca^2}{2r}$ sera la surface de son grand cercle; $\frac{4ca^2}{2r}$ ou $\frac{2ca^2}{r}$ sera la surface de cette même sphère, & par conséquent $\frac{ca^2}{2r} \times \frac{4}{3}a$, ou $\frac{c}{2r} \times \frac{4a^3}{3}$ sera sa solidité (*Géom.* 222 & 244).

Si l'on nomme x la hauteur d'un ſegment quelconque, on aura, comme nous l'avons vu dans la ſolution de la dernière queſtion, $\frac{caax}{3r}$ pour la ſolidité du ſecteur, & $\frac{c}{2r} \times (2ax - xx) \times \frac{a-x}{3}$ pour celle du cône qui en fait partie; donc celle du ſegment (*Géom.* 248) ſera $\frac{caax}{3r} - \frac{c}{2r}$. $(2ax-xx).\frac{a-x}{3} = \frac{c}{3r}\left(aax - \frac{2ax-xx}{2} \times (a-x)\right)$ $= \frac{c}{3r} \cdot \frac{2aax - 2aax + axx + 2axx - x^3}{2} = \frac{c}{3r}$. $\frac{3axx - x^3}{2} = \frac{cx^2}{2r} \times (a - \frac{1}{3}x)$ qui fait voir que la ſolidité du ſegment eſt égale au cercle qui auroit pour rayon la hauteur de ce ſegment, multiplié par le rayon moins le tiers de cette hauteur.

Quand on a les expreſſions algébriques des quantités, il eſt facile de réſoudre pluſieurs queſtions qu'on peut faire ſur ces mêmes quantités.

Par exemple, ſi l'on demandoit quelle doit être la hauteur d'un cône qui ſeroit égal en ſolidité à une ſphère donnée, & qui auroit pour rayon de ſa baſe le rayon de la ſphère: en nommant h cette hauteur & a le rayon de la baſe, on aura $\frac{c}{2r} \times \frac{a^2h}{3}$ pour la ſolidité de ce cône; & puiſqu'il doit être égal à la ſphère qui a auſſi pour rayon a, on aura $\frac{c}{2r} \times \frac{a^2h}{3} = \frac{c}{2r} \times \frac{4a^3}{3}$, d'où l'on tire $h = 4a$, en effaçant, dans chaque membre, le facteur commun $\frac{c}{2r} \times \frac{a^2}{3}$.

Cette valeur de h nous fait connoître que la hauteur doit être double du diamètre de la sphère, ce qui doit être en effet; car la sphère étant (*Géom.* 256) les $\frac{2}{3}$ du cylindre circonscrit, doit être le double d'un cône de même base & de même hauteur que ce cylindre, c'est-à-dire, égale à un cône de même base & d'une hauteur double.

281. Pour donner encore un exemple, proposons-nous cette question : *Connoissant le poids d'une sphère dans l'air, & son poids dans l'eau, connoître le rayon de cette sphère.*

Pour résoudre cette question nous supposerons un principe d'hydrostatique que nous démontrerons dans la quatrième Partie de ce Cours. Ce principe est que ce qu'un corps perd de son poids dans l'eau ou dans tout autre liquide, est égal au poids du volume de liquide qu'il déplace. Cela posé, supposons que p est le poids d'un pouce cube d'eau, & x le rayon inconnu de la sphère dont il s'agit : c'est-à-dire, le nombre de pouces de ce rayon. La solidité de cette sphère sera donc $\frac{2cx^3}{3r}$; & pour avoir le poids d'un pareil volume d'eau, il faudra multiplier cette quantité par p, puisqu'un pouce cube d'eau pesant p, un nombre de pouces cubes d'eau exprimé par $\frac{2cx^3}{3r}$ doit peser p de fois autant; c'est-à-dire, qu'il doit peser $\frac{2pcx^3}{3r}$; supposons donc que P est le poids qu'a, dans l'air, la sphère en question; alors selon le principe que nous venons de poser, elle ne doit peser dans l'eau, que $P - \frac{2cpx^3}{3r}$; puis donc qu'on suppose connoître ce qu'elle pèse dans l'eau, si l'on représente ce poids par P', on aura $P - \frac{2cpx^3}{3r} = P'$; & par

conséquent $\frac{2cpx^3}{3r} = P - P'$ ou $x^3 = \frac{(P - P') \times 3r}{2cp}$; tirant la racine cubique $x = \sqrt[3]{\frac{[(P - P') \times 3r]}{2cp}}$.

Supposons, pour en donner une application, que la sphère dont il s'agit pèse 5 onces dans l'air & 2 onces dans l'eau; & qu'un pied cube d'eau pèse 72 livres, ce qui donne (en divisant par 1728 qui est le nombre des pouces contenus dans un pied cube) $\frac{72}{1728}$ ou $\frac{1}{24}$ de livre, c'est-à-dire, $\frac{16}{24}$ ou $\frac{2}{3}$ d'once pour un pouce cube: prenons d'ailleurs le rapport de 113 à 355 pour celui du diamètre à la circonférence, & par conséquent, celui de $\frac{113}{2}$ à 355 pour celui de r à c; nous aurons donc $p = \frac{2}{3}$, $P = 5$, $P' = 2$, $r = \frac{113}{2}$, $c = 355$, & par conséquent. . . . .

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{(5 - 2)\,3 \cdot \frac{113}{2}}{2 \cdot 355 \cdot \frac{2}{3}}\right)} = \sqrt[3]{\left(\frac{\frac{1017}{2}}{\frac{1420}{3}}\right)} = \sqrt[3]{\frac{3051}{2840}}$$

ou (en prenant les logarithmes, pour plus de facilité) $Lx = \frac{1}{3} L \frac{3051}{2840} = \frac{1}{3} (L\,3051 - L\,2840)$; or $L\,3051 = 3{,}4844422$ & $L\,2840 = 3{,}4533183$; retranchant & prenant le tiers du reste, on a $Lx = 0{,}0103746$ qui répond à $1{,}0242$ à très-peu près: ce globe a donc un pouce & 0,0242, ou 1 pouce & 242 dix-millièmes de pouce, pour rayon.

Nous avons supposé tacitement que le globe entroit entièrement dans l'eau, par son poids; si au contraire il falloit lui ajouter un certain poids pour le faire plonger entièrement, alors ce feroit cette quantité qu'il faudroit prendre pour P', mais en même temps, il faudrait traiter P' comme négatif; c'est à-dire, qu'alors on auroit. . . . . $x = \sqrt[3]{\frac{[(P + P') \times 3r]}{2cp}}$. En effet, $\frac{2cpx^3}{3r}$ étant (ainsi que nous l'avons vu dans la solution précédente) le poids d'un volume d'eau égal à ce globe, & P le poids de ce

globe dans l'air, $\frac{2cpx^3}{3r} - P$ sera la quantité dont il pèse moins qu'un pareil volume d'eau, & par conséquent, ce qu'il faut ajouter pour le faire plonger entièrement ; on aura donc $\frac{2cpx^3}{3r} - P = P'$, qui donne la valeur de x que nous venons d'assigner pour ce cas.

Des Lignes courbes en général ; & , en particulier, des Sections coniques.

282. La considération des lignes courbes n'est point un objet de pure spéculation. Tant que les questions qu'on a à résoudre ne passent pas le second degré, on n'a pas besoin du secours de ces lignes ; mais au-delà elles deviennent nécessaires. Nous allons donc donner une idée générale des lignes courbes, & des usages qu'elles peuvent avoir pour la construction des équations auxquelles on arrive dans la résolution des questions.

Parmi les lignes courbes que l'on considère en Géométrie, les unes sont telles que chacun de leurs points peut être déterminé par une même loi ; c'est-à-dire, par des calculs & des opérations semblables : dans d'autres, chaque point se détermine par une loi différente, c'est-à-dire, par des calculs ou des opérations différentes ; mais cette différence elle-même est assujettie à une loi.

Quant aux lignes tracées au hasard, telles que

feroient par exemple, les traits qu'imprime fur le papier, la plume d'un écrivain, ils ne peuvent être l'objet d'une Géométrie rigoureufe. Néanmoins les recherches dont celle-ci s'occupe conduifent même à imiter, par des procédés directs & certains, des contours qui ne femblent affujettis à aucune loi: & l'art de lier ainfi, par des rapports approchés, des quantités dont la loi véritable feroit ou inconnue ou trop compofée, n'eft pas une des applications les moins utiles de la Géométrie & de l'Algèbre; nous aurons quelques occafions de le voir par la fuite.

Pour pouvoir tracer les lignes courbes qui font l'objet de la Géométrie, il faut donc connoître la loi à laquelle font affujettis les différens points de leur contour. Or cette loi peut être donnée de plufieurs manières : ou en indiquant un procédé par lequel ces courbes peuvent être décrites d'un mouvement continu : tel eft le cercle qui fe décrit en faifant tourner dans un plan, une ligne donnée, & autour d'un point donné. Ou bien en faifant connoître quelque propriété qui appartienne conftamment à chacun des points de cette courbe : c'eft ainfi que fachant, que tout angle qui a fon fommet à la circonférence du cercle, & qui s'appuie fur un diamètre, eft droit, je puis trouver fucceffivement chacun des points d'un cercle dont je

connois le diamètre, en tirant d'une des extrémités *A* de ce diamètre (*fig.* 34) une infinité de lignes droites *AC*, *AD*, *AE*, *AF*, & menant de l'autre extrémité *B*, les perpendiculaires *BC*, *BD*, *BE*, *BF*; les différens points *C*, *D*, *E*, *F*, &c. déterminés de cette manière appartiendront tous à la circonférence qui a *AB* pour diamètre.

Enfin cette loi peut être donnée par une équation, & on peut toujours ſuppoſer qu'elle eſt donnée par ce dernier moyen, parce que les deux autres dont nous venons de faire mention ſervent à trouver l'équation qui exprime cette loi. C'eſt ſous ce dernier point de vue que nous allons principalement conſidérer les courbes. C'eſt tout à la fois le plus ſimple & le plus fécond pour en connoître les propriétés, les ſingularités, & les uſages. Voyons donc comment une équation peut exprimer la nature d'une courbe; & puiſque juſqu'ici nous ne connoiſſons encore que la circonférence du cercle, commençons par celle-ci.

283. Suppoſons donc que *AMB* (*fig.* 35) eſt une courbe à laquelle nous ne connoîtrions encore d'autre propriété que celle-ci; que la perpendiculaire *PM* abaiſſée d'un point quelconque *M* de cette courbe, ſur la ligne *AB*, eſt moyenne proportionnelle entre les deux parties *AP* & *PB*. Voyons

comment

comment l'Algèbre peut nous aider à trouver chacun des points de cette courbe, & ses différentes propriétés.

Si je nomme a la ligne AB; la partie AP, x; & la perpendiculaire PM, y; alors PB sera $a - x$; & puisque nous supposons PM moyenne proportionnelle entre AP & PB, nous aurons $x : y :: y : a - x$; & par conséquent, $yy = ax - xx$.

Concevons maintenant que AB soit partagé en un certain nombre de parties égales, en 10 par exemple; & que par chaque point de division on élève des perpendiculaires pm, pm, pm, &c.; il est visible que si, dans l'équation qu'on vient de trouver, l'on suppose x successivement égal à chacune des lignes Ap, Ap, &c., y deviendra égal à chaque ligne correspondante pm, pm, &c., puisque l'équation $yy = ax - xx$ exprime que y est toujours moyenne proportionnelle entre x & $a - x$, quel que soit d'ailleurs x, ce qui est la propriété que nous supposons à chaque perpendiculaire pm. Donc on peut trouver successivement chacun des points de cette courbe, en donnant successivement à x plusieurs valeurs, & calculant les valeurs correspondantes de y: en voici un exemple.

Dans la supposition que nous venons de faire, que a est divisé en 10 parties, ou qu'il est composé de 10 parties,

nous aurons $a = 10$, & par conféquent l'équation devient $yy = 10x - xx$. Si donc nous fuppofons fucceffivement $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$, $x = 5$, $x = 6$, $x = 7$, $x = 8$, $x = 9$, $x = 10$; on trouvera fucceffivement $y = \sqrt{9}$, $y = \sqrt{16}$, $y = \sqrt{21}$, $y = \sqrt{24}$, $y = \sqrt{25}$, $y = \sqrt{24}$, $y = \sqrt{21}$, $y = \sqrt{16}$, $y = \sqrt{9}$, $y = \sqrt{0}$; ou bien $y = 3$; $y = 4$; $y = 4, 5$; $y = 4, 9$; $y = 5$; $y = 4, 9$; $y = 4, 5$; $y = 4$; $y = 3$; $y = 0$. Ainfi, fi l'on porte ces valeurs de y fucceffivement fur les perpendiculaires correfpondantes aux valeurs 1, 2, 3, &c. de x, les points m, m, déterminés de cette manière appartiendront tous à une courbe qui aura cette propriété que chaque perpendiculaire pm fera moyenne proportionnelle entre les deux parties Ap & pB de la droite AB, courbe que nous allons voir, dans un moment, être la circonférence même du cercle.

Nous avons vu que toute racine paire avoit deux valeurs, l'une pofitive, l'autre négative. Ainfi outre les valeurs de y que nous venons de trouver, on a encore ces autres-ci, $y = -3$; $y = -4$; $y = -4, 5$; $y = -4, 9$; $y = -5$; $y = -4, 9$; $y = -4, 5$; $y = -4$; $y = -3$; $y = 0$.

Pour avoir les points de la courbe qu'annoncent ces nouvelles valeurs de y, il faut, conformément à ce que nous avons déjà dit plufieurs fois fur les quantités négatives, prolonger les perpendiculaires pm, pm, &c., & porter à l'oppofite, c'eft-à-dire, de p en m', les quantités pm', pm', &c. égales chacune à fa correfpondante pm.

Si l'on veut avoir un plus grand nombre de points de la courbe, il n'y a autre chose à faire qu'à supposer *AB* divisé en un plus grand nombre de parties, par exemple en 100; c'est-à-dire, supposer $a = 100$; ou bien en conservant à a la même valeur 10, que ci-dessus, supposer à x des valeurs intermédiaires entre celles qu'on lui a données ci-dessus; on trouvera de même les valeurs intermédiaires de y, & par conséquent de nouveaux points de la courbe.

La valeur $y = 0$, qu'on a trouvée ci-dessus, fait voir que la courbe rencontre la ligne *AB* au point *B*, ou $x = a = 10$; puisque la perpendiculaire pm ayant alors pour valeur zéro, la distance du point m à la droite *AB* est nulle. On peut voir, aussi avec facilité, qu'elle doit rencontrer la ligne *AB* au point *A* : en effet puisqu'aux endroits où la courbe rencontre cette ligne, la valeur de y doit être 0; pour savoir quels sont ces endroits, il n'y a qu'à supposer que y est zéro, dans l'équation $yy = ax - xx$, ce qui la réduit à $0 = ax - xx$; or $ax - xx$ étant $= x \times (a - x)$, ce produit est zéro, dans deux cas, lorsque $x = 0$, & lorsque $x = a$. Donc réciproquement y sera aussi zéro dans ces deux cas; or x est évidemment $= 0$ au point *A*, & il est $= a$, au point *B*; donc la courbe rencontre en effet la ligne *AB*, aux points *A* & *B*.

D'après cet exemple, on peut commencer à appercevoir comment une équation sert à déterminer

les différens points d'une courbe. Nous en verrons d'autres exemples ; mais auparavant expliquons-nous sur certains mots dont nous ferons usage par la suite.

284. Lorsqu'on veut exprimer, par une équation, la nature d'une ligne courbe, on rapporte, ou l'on conçoit qu'on rapporte chacun des points *m*, *m*, &c. à deux lignes fixes *AB* & *OAO*, qui font entre elles un angle déterminé (aigu, droit ou obtus); & en imaginant que de chaque point *m* on mène les lignes *mp* & *mp'* parallèles aux lignes *OAO* & *AB*, il est évident qu'on connoîtra la situation de ce point, si l'on connoît les valeurs des lignes *mp'* ou *Ap* & *pm*, ou (ce qui revient au même) si l'on connoît l'une de ces lignes, & son rapport avec l'autre. Or ce que l'on entend, lorsqu'on dit qu'une équation exprime la nature d'une ligne courbe, c'est que cette équation donne le rapport qu'il y a, pour chaque point *m*, entre la ligne *Ap* & la ligne *pm*, ensorte que l'une étant connue ; l'équation fait connoître l'autre, & selon que ce rapport est plus ou moins composé, la courbe est elle-même d'un genre plus ou moins élevé.

Les lignes *Ap*, ou *mp'*, qui mesurent la distance de chaque point *m* à l'une *OAO* des deux lignes de comparaison, s'appellent les *abscisses* ; &

les lignes *mp* ou *p'A* qui meſurent la diſtance à l'autre ligne *AB* de comparaiſon, s'appellent les *ordonnées;* la ligne *AB*, s'appelle *l'axe des abſciſſes*, & la ligne *OAO*, s'appelle *l'axe des ordonnées*. Le point *A* d'où l'on commence à compter les abſciſſes, s'appelle *l'origine des abſciſſes*; on appelle de même *origine des ordonnées*, celui d'où l'on commence à compter les ordonnées *Ap'* ou *pm*: dans la figure 35, ces deux points ſont un ſeul & même point, ſavoir le point *A;* rien n'aſſujettit à compter les abſciſſes depuis le même point d'où l'on compte les ordomées; mais quand aucune circonſtance ne détermine à faire autrement, il eſt toujours plus ſimple de les compter du même point.

Les lignes *Ap*, *pm*, ſe nomment d'un nom commun, *les coordonnées de la courbe;* & conſidérées comme appartenant indifféremmment à un point quelconque de la courbe, on les appelle *des indéterminées;* on donne le même nom aux lettres ou ſignes algébriques x & y par leſquelles on repréſente ces lignes *Ap* & *pm*.

285. Revenons maintenant à notre équation, & voyons comment on peut en tirer les propriétés da la courbe.

1°. Du milieu *C* de *AB*, tirons, à un point

quelconque M de la courbe, la droite CM; en quelque endroit que ce soit, le triangle MPC sera toujours rectangle, & l'on aura, par conséquent, $(MP)^2 + (PC)^2 = (MC)^2$, c'est-à-dire, (puisque $PC = AC - AP = \frac{1}{2}a - x$), $yy + \frac{1}{4}aa - ax + xx = (MC)^2$; or puisque la droite MP, ou y, est par-tout moyenne proportionnelle entre AP & PB, on a, par-tout, $yy = ax - xx$; on aura donc aussi, par-tout, $ax - xx + \frac{1}{4}aa - ax + xx = (MC)^2$; c'est-à-dire, $\frac{1}{4}aa = (MC)^2$, qui donne $MC = \frac{1}{2}a$; chaque point M ou m, est donc également éloigné du point C; la courbe est donc une circonférence de cercle.

2°. D'un point quelconque M ou m de la courbe, menons aux deux extrémités A & B, les droites MA & MB; les triangles rectangles MPA, MPB, nous donneront $(AP)^2 + (PM)^2 = (AM)^2$, & $(PM)^2 + (PB)^2 = (MB)^2$, ou en mettant les valeurs algébriques, $xx + yy = (AM)^2$, & $aa - 2ax + xx + yy = (MB)^2$, donc en ajoutant ces deux équations, & mettant pour yy sa valeur $ax - xx$, on aura $aa - 2ax + 2xx + 2ax - 2xx = (AM)^2 + (MB)^2$; c'est-à-dire, $(AM)^2 + (MB)^2 = aa = (AB)^2$; propriété du triangle rectangle, & qui par conséquent nous fait connoître que l'angle AMB est toujours droit

en quelque endroit que ſoit le point M ſur la courbe ; voyez (*Géom.* 65).

3°. Si dans l'équation $xx + yy = (AM)^2$, on met, pour yy ſa valeur $ax - xx$, on aura $(AM)^2 = ax$, qui donne cette proportion $a : AM :: AM : x$, ou $AB : AM :: AM : AP$; c'eſt-à-dire, que la corde AM eſt moyenne proportionnelle, entre le diamètre AB, & le ſegment ou l'abſciſſe AP ; voyez (*Géom.* 112).

On trouveroit de même toutes les autres propriétés du cercle que nous avons démontrées en Géométrie, & cela en partant toujours de cette ſuppoſition, que l'ordonnée PM ou pm eſt moyenne proportionnelle entre AP & PB, ou Ap & pB.

Nous avons compté les abſciſſes, depuis le point A origine du diamètre, & nous avons eu l'équation $yy = ax - xx$. Si nous voulions compter les abſciſſes depuis le centre, c'eſt-à-dire, prendre pour abſciſſes les lignes CP, Cp, &c. ; alors repréſentant chacune de ces lignes, par z, nous aurions $CP = AC - AP$, c'eſt-à-dire, $z = \frac{1}{2}a - x$, & par conſéquent $x = \frac{1}{2}a - z$. Mettant donc pour x cette valeur dans l'équation $yy = ax - xx$, on aura $yy = a(\frac{1}{2}a - z) - (\frac{1}{2}a - z)^2$, qui ſe réduit à $yy = \frac{1}{4}aa - zz$, c'eſt-là l'équation du cercle en

ſuppoſant les coordonnées perpendiculaires, & leur origine au centre.

Au reſte, toute propriété qui appartiendra eſſentiellement à chaque point de la courbe, donnera toujours, en la traduiſant algébriquement, la même équation pour la courbe; du moins tant qu'on prendra les mêmes abſciſſes & les mêmes ordonnées; mais quand on changera l'origine, ou la direction des coordonnées, ou toutes les deux, on pourra avoir une équation différente; néanmoins elle ſera toujours du même degré. Nous venons de voir la vérité de la dernière partie de cette propoſition, dans le changement que nous venons de faire pour les abſciſſes; au lieu de l'équation $yy = ax - xx$, nous avons eu $yy = \frac{1}{4}aa - zz$, qui étant déduite de la première, a pour baſe la même propriété; mais ſi nous partions de cette autre propriété, que chaque diſtance MC eſt toujours la même, & $= \frac{1}{2}a$; alors nommant CP, z; & PM, y; nous aurions, à cauſe du triangle rectangle MPC, $yy + zz = \frac{1}{4}aa$, qui donne $yy = \frac{1}{4}aa - zz$, équation qui eſt la même que tout à l'heure, quoique déduite d'une propriété différente.

De l'Ellipſe.

286. Propoſons-nous maintenant d'examiner quelle ſeroit la courbe qui auroit cette autre propriété, que

la somme des deux distances $MF + Mf$ (*fig.* 36) de chacun de ses points à deux points fixes F & f, seroit toujours égale à une ligne donnée a.

Pour trouver les propriétés de cette courbe qu'on appelle une *Ellipse*, il faut chercher une équation qui exprime quelle relation il y a, en vertu de cette propriété connue, entre les perpendiculaires PM menées de chaque point M sur une ligne déterminée telle que Ff, par exemple, & leurs distances FP ou AP à quelque point F ou A pris arbitrairement.

Dans cette vue, je prends pour origine des abscisses le point A, déterminé en prenant depuis le milieu C de Ff, la ligne $CA = \frac{1}{2}a$; & ayant fait $CB = CA$, je nomme AP, x; PM, y; la ligne AF qui est censée connue, c; & la ligne FM, z; alors $FP = AP - AF =$ (*) $x - c$; $Mf = FMf - FM = a - z$, & $fP = PB - Bf = AB - AP - Bf = a - x - c$.

Cela posé, les triangles rectangles FPM, fPM, donnent $(FM)^2 = (PM)^2 + (FP)^2$, & $(Mf)^2$

(*) Si le point M avoit été pris de manière que la perpendiculaire MP tombât entre A & F, alors FP seroit $c - x$; mais cela n'apporteroit aucun changement à l'équation finale, parce que, dans la formation de cette équation on n'emploie que le quarré de FP, qui est toujours $xx - 2cx + cc$, soit qu'il vienne de $x - c$, soit qu'il vienne de $c - x$.

$=(PM)^2+(fP)^2$, ou $zz=yy+xx-2cx+cc$, & $aa-2az+zz=yy+aa-2ax+xx-2ac+2cx+cc$. Retranchant la seconde de ces deux dernières équations, de la première, & effaçant aa qui se trouvera de part & d'autre, j'ai $2az=2ax+2ac-4cx$, & par conséquent $z=\frac{ax+ac-2cx}{a}$; mettant donc pour z, cette valeur dans l'équation $zz=yy+xx-2cx+cc$, j'aurai $\frac{aaxx+2aacx+aacc-4acx^2-4ac^2x+4ccxx}{aa}=yy+xx-2cx+cc$, ou chassant le dénominateur, transposant & réduisant, $aayy=4aacx-4accx-4acx^2+4ccx^2$, ou $aayy=(4ac-4cc)ax+(4cc-4ac)x^2$, ou (parce que $4cc-4ac$ est la même chose que $-(4ac-4cc)$, on a $aayy=(4ac-4cc)ax-(4ac-4cc)x^2$, ou enfin $aayy=(4ac-4cc)(ax-xx)$, d'où l'on tire $yy=\frac{4ac-4cc}{aa}\cdot(ax-xx)$.

Telle est l'équation de la courbe dont chaque point a la propriété que nous avons supposée.

287. Cette équation peut servir à décrire la courbe par points, en donnant successivement à x plusieurs valeurs comme nous l'avons fait ci-dessus à l'occasion du cercle, & calculant en même temps les valeurs de y. Comme le procédé est absolument le même, nous n'en ferons point le calcul.

288. On peut encore décrire l'ellipſe par points, en cette manière; après avoir fait $CB = CA = \frac{1}{2}a$, on prend un intervalle quelconque Br, & l'on décrit au-deſſus & au-deſſous de AB, du point f comme centre & du rayon Br, un arc que l'on coupe en M & M' par un arc décrit du point F comme centre & du rayon Ar. Tous les points M & M' trouvés de cette manière ſont à l'ellipſe.

289. La propriété fondamentale d'après laquelle nous venons de trouver l'équation, donne elle-même un moyen fort ſimple de décrire cette courbe par un mouvement continu. En effet, ayant choiſi les deux points F & f tels qu'on les veut, on placera deux pointes ou piquets, aux deux points F & f, & y ayant fixé les deux extrémités d'un fil plus grand que la diſtance Ff, ſi l'on tend ce fil par le moyen d'un ſtyle M que l'on fera marcher en tenant toujours ce fil tendu, ce ſtyle M tracera la courbe en queſtion, puiſque la ſomme des deux diſtances du ſtyle aux deux points F & f ſera toujours égale à la longueur totale du fil.

290. De-là il eſt aiſé de voir que ſi la longueur du fil a été priſe égale à AB, la courbe paſſera par les deux points A & B. Car puiſque $Cf = CF$, on aura $AF = Bf$, & par conſéquent $AF + Af = Af + Bf = a$, & $BF + Bf = BF + AF = a$. C'eſt ce que l'équation fait voir auſſi; car pour ſavoir où la courbe rencontre la droite Ff prolongée, il faut faire $y = 0$; or cette ſuppoſition donne $\frac{4ac - 4cc}{aa} \cdot (ax - xx) = 0$, & comme $\frac{4ac - 4cc}{aa}$

ne peut être zéro, il faut, pour que cette équation ait lieu, que $ax - xx$ ou $x \times (a - x) = 0$, ce qui a lieu dans deux cas; ſavoir, lorſque $x = 0$, c'eſt-à-dire, au point *A*, & lorſque $x = a$, c'eſt-à-dire, au point *B*.

291. L'équation fait voir auſſi que la courbe s'étend au-deſſous comme au-deſſus de la ligne *AB*, & qu'elle eſt abſolument la même de part & d'autre de l'axe *AB*. En effet, cette équation donne $y = \pm \sqrt{\left[\frac{4ac - 4cc}{aa} \cdot (ax - xx)\right]}$, qui fait voir que pour chaque valeur de x ou de *AP*, il y a deux valeurs de y ou de *PM* parfaitement égales, mais qui étant de ſignes contraires, doivent être portées de côtés oppoſés.

Il eſt encore évident que ſi ſur le milieu *C* de *AB* on élève la perpendiculaire *DD'*, la courbe ſera partagée en deux parties parfaitement égales & ſemblables: c'eſt une ſuite immédiate de la deſcription; c'eſt auſſi une ſuite de l'équation; mais on l'en conclura plus aiſément quand nous aurons fait ſur cette équation les autres remarques qui nous reſtent à faire.

292. La ligne *AB* s'appelle le *grand axe* de l'ellipſe, & la ligne *DD'* le *petit axe*. Les deux points

F & f s'appellent les *foyers*. Les points A, B, D, D', sont les *sommets* des axes; & le point C le *centre*.

293. Si l'on veut avoir la valeur de l'ordonnée Fm'' qui passe par le foyer, il faut supposer AP ou $x = AF = c$; alors on aura $yy = \frac{4ac - 4cc}{aa} \times (ac - cc) = \frac{4.(ac-cc)^2}{aa}$; donc, tirant la racine quarrée, $y = \pm \frac{2.(ac-cc)}{a}$; donc $m'' m'''$ $= \frac{4.(ac-cc)}{a}$; cette ligne $m'' m'''$ est ce qu'on appelle le *paramètre* de l'ellipse. *Le paramètre est donc moindre que le quadruple de la distance* c *du sommet au foyer*, puisque sa valeur $\frac{4.(ac-cc)}{a}$ qui est la même chose que $4c - \frac{4cc}{a}$ est évidemment moindre que $4c$.

Si l'on nomme p cette valeur du paramètre, on aura $p = \frac{4ac - 4cc}{a}$, & par conséquent, $\frac{p}{a} = \frac{4ac - 4cc}{aa}$; on pourra donc changer l'équation à l'ellipse, en cette autre $yy = \frac{p}{a}.(ax - xx)$ qui est plus simple.

294. Si l'on veut savoir quelle est la valeur de la ligne CD, il n'y a qu'à supposer dans l'équation $yy = \frac{4ac - 4cc}{aa}.(ax - xx)$, que AP ou x est AC ou $\frac{1}{2}a$; on aura $yy = \frac{4ac - 4cc}{aa}(\frac{1}{2}aa - \frac{1}{4}aa)$,

qui se réduit à $yy = ac - cc$; c'est-à-dire, que $(CD)^2 = ac - cc = c.(a - c) = AF \times BF$; d'où l'on tire $AF : CD :: CD : BF$. On voit donc que *CD ou le demi-petit axe, est une moyenne proportionnelle entre les deux distances d'un même foyer aux deux sommets* A & B.

Comme la ligne DD' est une des lignes les plus remarquables de l'ellipse, on l'introduit dans l'équation de préférence à la ligne AF ou c. Pour nous conformer à cet usage, nous nommerons b cette ligne DD'; nous aurons donc $CD = \frac{b}{2}$, & puisque nous venons de trouver $(CD)^2 = ac - cc$, nous aurons $\frac{bb}{4} = ac - cc$, ou $bb = 4ac - 4cc$; l'équation à l'ellipse pourra donc être changée en $yy = \frac{bb}{aa}.(ax - xx)$.

Puisque nous avons $p = \frac{4ac - 4cc}{a}$, ou $pa = 4ac - 4cc$, & $bb = 4ac - 4cc$; de ces deux équations nous conclurons $pa = bb$, & par conséquent, en réduisant cette équation en proportion $a : b :: b : p$; *le paramètre est* donc *une troisième proportionnelle au grand axe & au petit axe.*

295. Si dans l'équation $yy = \frac{bb}{aa}.(ax - xx)$, on chasse le dénominateur, on aura $aayy = bb(ax - xx)$, & par conséquent $yy : ax - xx :: bb : aa$; faisant

donc attention que $ax - xx$ est la même chose que $x \times (a - x)$, & mettant, au lieu des quantités algébriques, les lignes de la figure qu'elles représentent, on aura $(PM)^2 : AP \times PB :: (DD')^2 : (AB)^2$; c'est-à-dire, que *le quarré d'une ordonnée quelconque au grand axe de l'ellipse, est au produit des deux abscisses* AP & PB, *comme le quarré du petit axe est au quarré du grand.* Et puisque cette propriété a lieu pour tous les points de l'ellipse, il s'ensuit que *les quarrés des ordonnées sont entre eux comme les produits des abscisses correspondantes.*

296. L'équation $yy = \frac{bb}{aa} \cdot (ax - xx)$ ne diffère (283) de celle du cercle qui seroit décrit sur AB comme diamètre (*fig.* 37) qu'en ce que la quantité $ax - xx$, y est multipliée par $\frac{bb}{aa}$, c'est-à-dire, par le rapport du quarré du petit axe au quarré du grand; ensorte que si l'on nomme z une ordonnée quelconque PN du cercle, on aura $zz = ax - xx$; mettant donc pour $ax - xx$, cette valeur zz dans l'équation à l'ellipse, on aura $yy = \frac{bb}{aa} zz$, & tirant la racine quarrée, $y = \frac{b}{a} z$ ou $ay = bz$ qui donne $y : z :: b : a$, ou $PM : PN :: DD' : AB$, ou $:: CD : AC$ ou CE; on voit donc que *les ordonnées à l'ellipse ne sont autre chose que les ordonnées du cercle décrit sur le grand axe, diminuées proportionnellement, c'est-à-dire, dans le rapport du grand axe au petit axe.*

De-là il eſt aiſé de décrire une ellipſe par le moyen du cercle. On voit en même temps que le cercle eſt une ellipſe dont les deux axes a & b ſont égaux, ou dont la diſtance du ſommet au foyer eſt égale au demi-grand axe, ou encore dont le paramètre eſt égal au diamètre. Car en ſuppoſant dans les équations ci-deſſus, $b = a$, ou $c = \frac{1}{2}a$, ou $p = a$, on a $yy = ax - xx$, équation au cercle.

297. Par les équations que nous avons trouvées juſqu'ici, il paroît donc qu'il n'en eſt pas de l'ellipſe comme du cercle : une ſeule ligne détermine celui-ci, c'eſt ſon diamètre ; au lieu que le grand axe AB (*fig.* 36) ne ſuffit pas pour déterminer l'ellipſe ; il faut encore connoître ou le petit axe b ou ſon paramètre p, ou la diſtance c du ſommet au foyer. Quand on connoît le grand axe & la diſtance c, l'ellipſe eſt facile à décrire, comme on l'a vu ci-deſſus. Mais ſi l'on donnoit le grand axe & le petit axe, il faudroit, pour décrire l'ellipſe par un mouvement continu, déterminer les foyers ; c'eſt une choſe facile, en prenant le demi-grand axe pour rayon, & traçant de l'extrémité D (*fig.* 36) du petit axe, comme centre, deux petits arcs qui coupent le grand axe aux deux points F & f qui ſeront les foyers : car la ſomme des deux diſtances $FD + Df$ devant être égale à a, il faut, lorſque ces deux lignes ſont égales, que chacune ſoit égale à $\frac{1}{2}a$.

Si l'on donnoit le grand axe & le paramètre, on détermineroit le petit axe en prenant une moyenne proportionnelle entre ces deux lignes ; c'eſt ce qu'enſeigne la proportion $a : b :: b : p$, trouvée ci-deſſus (294). Le petit axe étant trouvé, on acheveroit comme il vient d'être dit.

298. *Si, pour quelque point* M *que ce ſoit de*

l'ellipſe

l'ellipse (fig. 36), *on prolonge la ligne* fM *tirée d'un des foyers, jusqu'à ce que son prolongement* MG *soit égal à l'autre distance* MF; *& qu'ayant tiré* GF, *on lui mène du point* M *la perpendiculaire* MOT, *cette dernière sera tangente à l'ellipse, c'est-à-dire, ne la rencontrera qu'au seul point* M.

En effet, à cause des lignes égales MF & MG, la ligne MT est perpendiculaire sur le milieu de GF. Donc si de tel autre point N que ce soit, de cette ligne, on mène les deux droites NG & NF, elles seront égales. Supposons donc que MT pût rencontrer l'ellipse en quelque autre point N, alors en tirant Nf, il faudroit que $FN + Nf$ pût être égal à $MF + Mf$, ou à $GM + Mf$, c'est-à-dire, à Gf; mais Gf est plus petit que $GN + Nf$, & par conséquent plus petit que $FN + Nf$; donc le point N est hors de l'ellipse.

299. Les angles FMO, OMG sont égaux, d'après la construction qu'on vient de donner; or OMG est égal à son opposé fMN, donc FMO est égal à fMN. *Donc les deux lignes qui vont d'un même point de l'ellipse aux deux foyers, font des angles égaux avec la tangente.*

L'expérience apprend qu'un rayon de lumière qui tombe sur une surface, se réfléchit en faisant l'angle de réflexion égal à l'angle d'incidence; donc si F est un point lumineux,

tous les rayons qui partis du point F, tomberont sur la concavité MAM', iront se rassembler en f, & réciproquement.

Si du point M, on élève sur MT la perpendiculaire MI (qui sera en même temps perpendiculaire à la courbe), cette ligne divisera l'angle FMf en deux parties égales; car si des angles droits IMT, IMN on retranche les angles égaux FMT & fMN, les angles restans FMI & IMf seront égaux.

300. De-là, on peut calculer la valeur de la distance PI depuis l'ordonnée jusqu'à l'endroit où la perpendiculaire MI rencontre l'axe. Cette ligne PI s'appelle *sousnormale*, & la ligne MI, *normale*.

Pour calculer PI, nous allons d'abord calculer FI. Puisque l'angle FMf est divisé en deux parties égales, on a $Mf : MF :: fI : FI$ (*Géom.* 104); & par conséquent (*Géom.* 98) $Mf + MF : Mf - MF :: fI + FI : fI - FI$. Or $Mf + MF = a$; & en nommant MF, z, comme ci-dessus (286), $Mf = a - z$, & par conséquent $Mf - MF = a - 2z$; d'ailleurs $fI + FI = Ff = AB - 2AF = a - 2c$, & $fI - FI = Ff - 2FI = a - 2c - 2FI$; donc $a : a - 2z :: a - 2c : a - 2c - 2FI$; donc $aa - 2ac - 2a \times FI = aa - 2ac - 2az + 4cz$, d'où l'on tire $FI = \frac{az - 2cz}{a}$, ou en mettant

pour z, sa valeur $\frac{ax+ac-2cx}{a}$ trouvée (286), on a $FI = \frac{aac - 2acc + aax - 4acx + 4ccx}{aa}$; mais $FI = FP + PI = AP - AF + PI = x - c + PI$; donc $PI = FI - x + c = \frac{aac-2acc+aax-4acx+4ccx}{aa} - x + c = \frac{2aac-2acc-4acx+4ccx}{aa}$ $= \frac{2a.(ac-cc)-4x.(ac-cc)}{aa} = \frac{2a-4x}{aa} \times (ac-cc)$, ou en mettant pour $ac-cc$ sa valeur $\frac{bb}{4}$ (294); on a enfin $PI = bb\frac{(a-2x.)}{2aa}$ ou $PI = \frac{bb}{aa}(\frac{1}{2}a - x)$.

301. De-là, il est aisé d'avoir la valeur de la distance PT depuis l'ordonnée jusqu'à la rencontre de la tangente, ce qu'on appelle la *soutangente*. Car le triangle IMT étant rectangle, & PM une perpendiculaire abaissée de l'angle droit, on a (*Géom.* 112) $PI : PM :: PM : PT$, c'est-à-dire, $\frac{bb}{aa} \times (\frac{1}{2}a - x) : y :: y : PT$; donc $PT = \frac{aayy}{bb(\frac{1}{2}a-x)}$ ou (en mettant pour yy, sa valeur $\frac{bb}{aa}(ax - xx)$), $PT = \frac{(ax-xx)}{\frac{1}{2}a-x}$.

Les expressions algébriques des deux lignes PI & PT peuvent servir à mener une perpendiculaire & une tangente à l'ellipse, en quelque point M que ce soit. Car lorsque le point M est donné, en abaissant la perpendiculaire MP, on a la valeur de AP, x. Et comme on est supposé

connoître a & b, on connoît donc tout ce qui entre dans la valeur de PI & dans celle de PT.

302. De l'expreſſion de PT, on peut conclure que ſi l'on mène une tangente au cercle décrit ſur le grand axe AB (*fig.* 37), au point N où ce cercle eſt rencontré par l'ordonnée PM à l'ellipſe, les tangentes NT & MT aboutiront au même point T ſur l'axe. Car puiſque le ſecond axe b n'entre point dans l'expreſſion de PT, cette ligne PT ſera donc toujours la même tant que a ſera le même & x le même. Ainſi toutes les tangentes aux points correſpondans de toutes les ellipſes décrites ſur AB comme grand axe, ſe rencontrent au même point T.

Si à PT (*fig.* 36), on ajoute CP, qui eſt $\frac{1}{2}a - x$, on aura $CT = \frac{(ax - xx)}{\frac{1}{2}a - x} + \frac{1}{2}a - x$ qui, en réduiſant tout en fraction, ſe réduit à $\frac{\frac{1}{4}aa}{\frac{1}{2}a - x}$; c'eſt-à-dire, que $CT = \frac{(AC)^2}{CP}$; d'où l'on tire cette proportion $CP : AC :: AC : CT$.

303. Si l'on veut avoir l'expreſſion de TM, cela ſera facile, par le moyen du triangle rectangle TPM qui donne $(TM)^2 = (TP)^2 + (PM)^2 = \frac{(ax - xx)^2}{(\frac{1}{2}a - x)^2} + \frac{bb}{aa} \cdot (ax - xx) = \left[ax - xx + \frac{bb}{aa}(\frac{1}{2}a - x)^2\right] \times \frac{ax - xx}{(\frac{1}{2}a - x)^2}$.

304. Si de quelque point M que ce ſoit de l'ellipſe, on mène ſur le petit axe DD' la perpendiculaire

ou l'ordonnée MP', & qu'on nomme DP', x'; MP', y'; on aura $DP' = CD - CP' = CD - PM$, c'est-à-dire, $x' = \frac{1}{2}b - y$, & par conséquent $y = \frac{1}{2}b - x'$. On aura de même $MP' = CP = CA - AP$; c'est-à-dire, $y' = \frac{1}{2}a - x$, & par conséquent $x = \frac{1}{2}a - y'$. Si l'on substitue ces valeurs de x & de y, dans l'équation $yy = \frac{bb}{aa}(ax - xx)$. ou $aayy = bb(ax - xx)$, on aura $\frac{1}{4}aabb - aabx' + aax'x' = \frac{1}{2}aabb - abby' - \frac{1}{4}aabb + abby' - bby'y'$, qui se réduit à $bby'y' = aabx' - aax'x'$, d'où l'on tire $y'y' = \frac{aa}{bb}(bx' - x'x')$, équation semblable à celle qu'on a eue pour le grand axe, & dont on tirera par conséquent des conclusions semblables, savoir que *le quarré d'une ordonnée* P'M *au petit axe, est au produit des deux abscisses* D P' × P'D', *comme le quarré du grand axe, est au quarré du petit*; en effet, on tire de cette équation, $y'y' : bx' - x'x' :: aa : bb$; or $bx' - x'x'$ est $x'(b - x')$ ou $DP' \times P'D'$. On en conclura aussi que *les quarrés des ordonnées au petit axe, sont entre eux comme les produits des abscisses correspondantes*; & que *l'ellipse peut être décrite par le moyen du cercle construit sur son petit axe, en allongeant les ordonnées de ce cercle dans le rapport du petit axe au grand.* Voyez (*fig.* 37).

305. On peut voir facilement, par-là, que la courbure de la surface extérieure des mâts est celle

d'une portion d'ellipsoïde, c'est-à-dire, d'un solide engendré par la révolution d'une demi-ellipse *DRO* (*fig.* 39) tournant autour de son grand axe.

En effet, pour déterminer les diamètres moyens entre le plus grand & le plus petit, on tire une ligne *CD* pour représenter le plus grand diamètre; & décrivant des extrémités *C* & *D* comme centres, & du rayon *CD* les deux arcs *DA* & *CA* qui se coupent en *A*, on abaisse la perpendiculaire *AB*, & ayant mené parallèlement à *CD* une ligne *EF* égale au plus petit diamètre du mât, on regarde la partie interceptée *BL* comme représentant la hauteur du mât depuis le premier pont (où se trouve le plus grand diamètre) jusqu'au chouquet. On divise *BL* en un certain nombre de parties égales; & menant par les points de division des parallèles *IgN* à la ligne *CD*, on prend ces parallèles pour les diamètres moyens que doit avoir le mât à des hauteurs représentées par la ligne correspondante *Bg*; or si l'on conçoit que *BM* soit la hauteur réelle qui a été représentée par *BL*; & si l'on prend *BT* telle que l'on ait $BT : BM :: Bg : BL$, alors *BT* sera la hauteur à laquelle on doit placer le demi-diamètre *gN*; tirant donc *TR* parallèle & égale à *gN*, le point *R* sera un point de la surface du mât; mais si par le point *R* & par le point *N*,

on mène RN qui rencontre BD en V, cette ligne sera parallèle à BM, & puisqu'on a $BT : BM :: Bg : BL$, ou $BT : Bg :: BM : BL$, on aura (à cause que $BT = RV$ & $Bg = VN$) $RV : VN :: BM : BL$; c'est-à-dire, que les ordonnées RV de la courbe du mât sont aux ordonnées VN du cercle AND, toujours dans un même rapport; donc cette courbe est une ellipse. Si l'on vouloit la décrire par un mouvement continu, il faudroit en déterminer les axes, ce qui est facile en menant CO parallèle à BM, & telle que $CO : CD :: BM : BL$; CO & CD seront les deux demi-axes, avec lesquels il sera facile de déterminer les foyers, & par conséquent de décrire la courbe, par quelqu'une des méthodes que nous avons données (287, 88 & 89). Mais tout ceci suppose qu'on fait déterminer le point L, tel que menant ELF parallèle à CD, ELF soit égal au plus petit diamètre du mât; c'est ce que l'on fera facilement en cette manière; on prolongera DC vers H d'une quantité CH égale à la moitié du petit diamètre: du point H comme centre & d'un rayon égal à CD, on tracera un petit arc qui coupera AB au point cherché L. Car si l'on imagine EF prolongée jusqu'à ce qu'elle rencontre CO en T, & que l'on tire le rayon CF, le triangle rectangle CTF donnera $CT = \sqrt{[(CF)^2 - (TF)^2]} = \sqrt{[(HE)^2 -}$

$(BH)^2 = BL$, puiſqu'on preſcrit de faire $HL = CD = CF$, & $HC =$ à la valeur de LF, ce qui rend $BH = TF$.

306. Par ce qui précède, on voit donc que les propriétés à l'égard du ſecond axe ſont ſemblables à celles qu'on a trouvées à l'égard du premier, du moins, en ce qui ne dépend point des foyers. Si l'on veut avoir ſur le ſecond axe les lignes analogues à celles que nous venons de calculer ſur le premier axe, c'eſt-à-dire, $P'I'$, $P'T'$, CT' & MT', (*fig.* 36) on les trouvera aiſément par le moyen de leurs correſpondantes qu'on vient d'avoir, & des triangles ſemblables qu'il eſt aiſé de reconnoître dans la figure. Si on exprime ces lignes par le moyen des abſciſſes DP' ou x', on trouvera leurs expreſſions toutes ſemblables à celles qu'on a eues, en x, pour les lignes analogues ſur le premier axe.

On donne auſſi un *paramètre* au ſecond axe; mais ce qu'on entend alors par cette ligne, ce n'eſt pas une ligne qui paſſe par le foyer de ce ſecond axe, (car il n'a point de foyer), mais une troiſième proportionnelle à ce ſecond axe & au premier.

307. Juſqu'ici nous n'avons compté les abſciſſes que depuis le ſommet; ſi nous voulions les compter depuis le centre C, alors nommant l'abſciſſe CP, z,

nous aurions AP ou $x = \frac{1}{2}a - z$; substituant cette valeur de x, dans l'équation $yy = \frac{bb}{aa}(ax - xx)$ & dans les valeurs de PI, PT, CT, & $(TM)^2$, on aura $yy = \frac{bb}{aa}.(\frac{1}{4}aa - zz)$; $PI = \frac{bbz}{aa}$; $PT = \frac{\frac{1}{4}aa - zz}{z}$; $CT = \frac{\frac{1}{4}aa}{z}$; $(TM)^2 = (\frac{1}{4}aa - zz + \frac{bbzz}{aa})\frac{\frac{1}{4}aa - zz}{zz}$.

L'équation $yy = \frac{bb}{aa}.(\frac{1}{4}aa - zz)$ donne $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{(\frac{1}{4}aa - zz)}$, qui fait voir que pour une même valeur de CP ou z; on a deux ordonnées PM & PM'. Comme les valeurs de z commencent en C, & finissent en A, il semble d'abord que cette équation ne donne que la moitié DAD' de l'ellipse; mais rien ne détermine à donner à z, des valeurs positives, plutôt que des valeurs négatives; en donnant à z de ces dernières valeurs, on aura les ordonnées pm qui déterminent la seconde moitié; & comme en mettant $-z$, au lieu de $+z$ dans $\pm \frac{b}{a}\sqrt{(\frac{1}{4}aa - zz)}$, cette quantité ne change point, il s'ensuit que la moitié DBD' est parfaitement égale & semblable à la moitié DAD'.

308. Si d'un point quelconque M de l'ellipse (*fig.* 38), on mène au milieu C de l'axe AB, c'est-à-dire, au centre, une droite MCM' terminée

de l'autre part à l'ellipſe, on appelle cette droite un *diamètre*. Et ſi par le ſommet M, on mène la tangente MT, & par le centre C le diamètre NN' parallèle à MT, celui-ci s'appellera *diamètre conjugué* du premier. Une ligne mO menée d'un point m de l'ellipſe parallèlement à MT, & terminée au diamètre MM', s'appelle une *ordonnée* à ce diamètre ; & MO s'appelle l'abſciſſe. Le paramètre du diamètre MM' eſt une troiſième proportionnelle à MM' & NN'.

309. Nous allons faire voir maintenant, que les ordonnées mO, à un diamètre quelconque, ont des propriétés ſemblables à celles des ordonnées aux axes.

Pour cet effet, j'abaiſſe des points m & O, les perpendiculaires mp, OQ, ſur l'axe AB ; & je mène la ligne mS parallèle au même axe. Je nomme AB, a ; PM, y, CP, z ; Qp, g ; CQ, k, j'aurai $AP = \frac{1}{2}a - z$; $PB = \frac{1}{2}a + z$; $Ap = CA - Cp = CA - CQ - Qp = \frac{1}{2}a - k - g$; $pB = CB + Cp = \frac{1}{2}a + k + g$.

Les triangles ſemblables TPM, mSO, donnent $TP : PM :: mS$ ou $pQ : SO$; c'eſt-à-dire, $\frac{\frac{1}{4}aa - zz}{z} : y :: g : SO = \frac{gzy}{\frac{1}{4}aa - zz}$. Les triangles ſemblables CMP, COQ, donnent $CP : PM :: CQ : QO$; c'eſt-à-dire, $z : y :: k : QO = \frac{ky}{z}$;

donc $pm = QS = QO - SO = \frac{ky}{z} - \frac{gzy}{\frac{1}{4}aa - zz}$.
Or puisque le point m est un point de l'ellipse, il faut (295) que $(pm)^2 : (PM)^2 :: Ap \times pB : AP \times PB$, c'est-à-dire, $\left(\frac{ky}{z} - \frac{gzy}{\frac{1}{4}aa - zz}\right)^2 : yy :: (\frac{1}{2}a - k - g) \times (\frac{1}{2}a + k + g) : (\frac{1}{2}a - z)\ (\frac{1}{2}a + z)$, ou $\frac{kkyy}{zz} - \frac{2gkzyy}{z(\frac{1}{4}aa - zz)} + \frac{ggzzyy}{(\frac{1}{4}aa - zz)^2} : yy :: \frac{1}{4}aa - kk - 2kg - gg : \frac{1}{4}aa - zz$; ou, en multipliant les extrêmes & les moyens, & faisant attention aux quantités qui se trouveront multipliées & divisées en même temps par $\frac{1}{4}aa - zz$, & à celles qui le seront aussi par z, on aura $\frac{kkyy}{zz}(\frac{1}{4}aa - zz) - 2gkyy + \frac{ggzzyy}{\frac{1}{4}aa - zz} = \frac{1}{4}aayy - kkyy - 2gkyy - ggyy$, ou, en développant le terme $\frac{kkyy}{zz}(\frac{1}{4}aa - zz)$ & supprimant $-kkyy$ & $-2gkyy$ qu'on aura alors de part & d'autre, divisant de plus par yy, on aura $\frac{\frac{1}{4}aakk}{zz} + \frac{ggzz}{\frac{1}{4}aa - zz} = \frac{1}{4}aa - gg$, équation qui nous est nécessaire pour notre objet; mais avant de l'y employer, tirons-en une connoissance dont nous avons besoin.

Si l'on suppose que le point O, qu'ici nous avons supposé quelconque, soit le point C, c'est-à-dire, que la ligne mO passe par le centre, ou devienne CN, alors CQ ou k devient zéro, & la ligne Qp

ou g, devient CR. Or si dans l'équation qu'on vient de trouver, on fait $k = o$, on aura, après avoir chassé le dénominateur, transposé, réduit, & divisé par $\frac{1}{4}aa$, $gg = \frac{1}{4}aa - zz$; c'est-à-dire, $(CR)^2 = \frac{1}{4}aa - zz = (\frac{1}{2}a - z)(\frac{1}{2}a + z) = AP \times PB$.

Après cette remarque, revenons à notre objet, & nommons CM, $\frac{1}{2}a'$; CN, $\frac{1}{2}b'$; mO, y'; CO, z'. Les triangles semblables CPM, CQO, donnent $CM : CO :: CP : CQ$; ou $\frac{1}{2}a' : z' :: z : k = \frac{zz'}{\frac{1}{2}a'}$ les triangles CNR, mSO, semblables à cause des côtés parallèles, donnent $mO : mS :: CN : CR$, ou $y' : g :: \frac{1}{2}b' : CR = \frac{\frac{1}{2}gb'}{y'}$; donc $(CR)^2 = \frac{\frac{1}{4}ggb'b'}{y'y'}$; mais on vient de voir que $(CR)^2 = \frac{1}{4}aa - zz$; donc $\frac{\frac{1}{4}ggb'b'}{y'y'} = \frac{1}{4}aa - zz$; d'où l'on tire $gg = \frac{y'y'(\frac{1}{4}aa - zz)}{\frac{1}{4}b'b'}$.

Reprenons maintenant l'équation $\frac{\frac{1}{4}aakk}{zz} + \frac{ggzz}{\frac{1}{4}aa - zz} = \frac{1}{4}aa - gg$, & substituons-y pour gg & kk les valeurs que nous venons de trouver; nous aurons $\frac{1}{4}aa \cdot \frac{zzz'z'}{\frac{1}{4}a'a'zz} + \frac{y'y'zz(\frac{1}{4}aa - zz)}{\frac{1}{4}b'b'(\frac{1}{4}aa - zz)} = \frac{1}{4}aa - \frac{\frac{1}{4}aay'y'}{\frac{1}{4}b'b'} + \frac{y'y'zz}{\frac{1}{4}b'b'}$, ou en réduisant & divisant ensuite par $\frac{1}{4}aa$, $\frac{z'z'}{\frac{1}{4}a'a'} = 1 - \frac{y'y'}{\frac{1}{4}b'b'}$; ou, chassant les dénominateurs $\frac{1}{4}a'a'$ & $\frac{1}{4}b'b'$, on a $\frac{1}{4}b'b'z'z' = \frac{1}{16}a'a'b'b' - \frac{1}{4}a'a'y'y'$, & enfin $y'y' = \frac{b'b'}{a'a'}(\frac{1}{4}a'a' - z'z')$;

d'où l'on tire $y'y' : \frac{1}{4}a'a' - z'z' :: b'b' : a'a'$; c'est-à-dire, $(mO)^2 : MO \times OM' :: (NN')^2 : (MM')^2$. Ainsi l'équation par rapport à deux diamètres conjugués quelconques, est semblable à celle qu'on a eue à l'égard des deux axes.

310. Si l'on fait $y' = 0$, on trouve $z'z' - \frac{1}{4}a'a' = 0$, qui donne $z' = \pm \frac{1}{2}a'$; la courbe rencontre donc la ligne MM' en deux points opposés M & M', éloignés du centre, chacun de la quantité $\frac{1}{2}a'$, ou CM ; ainsi tous les diamètres sont coupés en deux parties égales au centre.

311. L'équation $y'y' = \frac{b'b'}{a'a'}(z'z' - \frac{1}{4}a'a')$ donnant $y' = \pm \frac{b'}{a'}\sqrt{(\frac{1}{4}a'a' - z'z')}$, fait voir que si l'on prolonge mO de manière que $Om' = Om$, le point m' appartiendra à la courbe ; donc *chaque diamètre de l'ellipse coupe en deux parties égales les parallèles à la tangente qui passe par son origine* M.

312. De-là on peut conclure 1°. que la tangente à l'extrémité N du diamètre NN', est parallèle au diamètre MM'. 2°. ; De ce que $y' = \pm \frac{b'}{a'}\sqrt{(\frac{1}{4}a'a' - z'z')}$, on peut conclure que les ordonnées Om au diamètre MM', sont celles du cercle qui auroit MM' pour diamètre, mais diminuées ou augmentées dans le rapport de a' à b', & inclinées sous un angle égal à celui des diamètres conjugués. Si $a' = b'$, ces

ordonnées sont précisément égales à celles de ce même cercle. Enfin si l'on veut savoir à quel endroit de l'ellipse les deux diamètres conjugués peuvent être égaux, il n'y a qu'à chercher à quel endroit on a $CP = CR$ ou $(CP)^2 = (CR)^2$; c'est-à-dire, $zz = \frac{1}{4}aa - zz$; or cette équation donne $z = \sqrt{\frac{1}{8}aa} = \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{1}{2}}$, que l'on construira ainsi: ayant décrit sur le grand axe AB comme diamètre (*fig.* 37) le demi-cercle $ANEB$ coupé en E par le petit axe CD, on divisera l'arc AE en deux parties égales en N'', & ayant abaissé $N''P$ qui coupe l'ellipse en M'', & M'; CM'' & CM' seront les deux demi-diamètres conjugués, égaux. Car si l'on nomme CP, z, comme le triangle CPN'' est rectangle & isoscèle, à cause de l'angle ACN'' de 45 degrés, on aura $zz + zz = (CN'')^2 = \frac{1}{4}aa$; donc $zz = \frac{1}{8}aa$, & $z = \sqrt{(\frac{1}{8}aa)} = \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{1}{2}}$.

313. Si du centre C (*fig.* 38) on mène la perpendiculaire CF sur la tangente TM, les triangles semblables TPM, TCF donneront $TPM : PM :: CT : CF$; d'où $CF = \frac{PM \times CT}{TM}$. Pareillement les triangles TPM & CNR, semblables à cause des côtés parallèles, donneront $TM : PT :: CN : CR$; donc $CN = \frac{TM \times CR}{PT}$; & par conséquent, on aura $CN \times CF = \frac{PM \times CT \times TM \times CR}{TM \times PT} = \frac{PM \times CT \times CR}{PT}$, ou, en

quarrant, $(CN)^2 \times (CF)^2 = \frac{(PM)^2 \times (CT)^2 \times (CR)^2}{(PT)^2}$; or nous avons vu ci-dessus que yy ou $(PM)^2 = \frac{bb}{aa} \cdot (\frac{1}{4}aa - zz)$; $(CT)^2 = \frac{\frac{1}{16}a^4}{zz}$, $(PT)^2 = \frac{(\frac{1}{4}aa - zz)^2}{zz}$; & $(CR)^2 = \frac{1}{4}aa - zz$ (309) : substituant ces quantités, on aura, après les réductions faites, $(CN)^2 \times (CF)^2 = \frac{1}{16}aabb$, & par conséquent $CN \times CF = \frac{1}{4}ab$; or en menant la tangente NT'' qui rencontre TM en I, $CN \times CF$ exprime la surface du parallélogramme $CMIN$, & $\frac{1}{4}ab$ ou $\frac{1}{2}a \times \frac{1}{2}b$ exprime celle du rectangle formé sur les deux demi-axes; donc *les parallélogrammes formés par les tangentes aux extrémités des diamètres conjugués, sont égaux entre eux, & au rectangle formé sur les deux axes.*

314. Les mêmes triangles semblables TPM & CRN donnent, $PT : PM :: CR : RN$; donc $RN = \frac{CR \times PM}{PT}$, ou $(RN)^2 = \frac{(CR)^2 \times (PM)^2}{(PT)^2} =$

$$\frac{(\frac{1}{4}aa - zz)\frac{bb}{aa}(\frac{1}{4}aa - zz) \times zz}{(\frac{1}{4}aa - zz)^2} = \frac{bbzz}{aa};$$ mais les triangles rectangles CRN & CPM donnent $(CR)^2 + (RN)^2 = (CN)^2$ & $(CP)^2 + (PM)^2 = (CM)^2$; donc $(CR)^2 + (RN)^2 + (CP)^2 + (PM)^2 = (CN)^2 + (CM)^2$; substituant dans le premier membre, au lieu des lignes qui y entrent, leurs

valeurs algébriques, on aura, toute réduction faite, $\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb = (CN)^2 + (CM)^2$; donc *la somme des quarrés de deux demi-diamètres conjugués quelconques de l'ellipse est égale à la somme des quarrés des deux demi-axes.*

315. Si dans $(CN)^2 = (CR)^2 + (RN)^2$, on substitue pour CR & RN leurs valeurs, on aura $(CN)^2 = \frac{1}{4}aa - zz + \frac{bbzz}{aa}$; or nous avons trouvé ci-dessus $(TM)^2 = \left(\frac{1}{4}aa - zz + \frac{bbzz}{aa}\right) \times \frac{\frac{1}{4}aa - zz}{zz}$; par conséquent $(TM)^2 = (CN)^2 \times \frac{\frac{1}{4}aa - zz}{zz}$; mais les triangles semblables TPM, $MP'T'$ donnent, en quarrant, $(PT)^2 : (TM)^2 :: (P'M)^2 : (MT')^2$ ou $\frac{(\frac{1}{4}aa - zz)^2}{zz} : (CN)^2 \times \frac{\frac{1}{4}aa - zz}{zz} :: zz : (MT')^2$; donc $(MT')^2 = \frac{(CN)^2 \times zz}{\frac{1}{4}aa - zz}$; donc $(TM)^2 \times (MT')^2 = (CN)^4$ ou $TM \times MT' = (CN)^2$; mais si l'on nomme p' le paramètre du diamètre MM', on aura $2CM : 2CN :: 2CN : p'$ (308); & par conséquent $2p' \times CM = 4(CN)^2$ ou $(CN)^2 = \frac{1}{2}p' \times CM$; donc $TM \times MT' = \frac{1}{2}p' \times CM$; & par conséquent $CM : TM :: MT' : \frac{1}{2}p'$.

Si, sur TT' comme diamètre (*fig.* 40), on décrit un demi-cercle, il passera par le point C, puisque l'angle TCT' est droit; or si l'on prolonge

CM

CM jusqu'à ce qu'il rencontre la circonférence en V, on aura, par la nature du cercle (*Géom.* 124), $CM : TM :: MT' : MV$; donc $MV = \frac{1}{2}p'$.

316. De-là on peut tirer une méthode simple pour avoir les axes d'une ellipse, & par conséquent pour la décrire, lorsqu'on ne connoît que deux diamètres conjugués MM' & NN', & l'angle qu'ils font entre eux.

On prolongera CM d'une quantité MV égale à son demi-paramètre; & du milieu X de CV on élevera une perpendiculaire XZ qui rencontre en Z la ligne indéfinie TT' menée par le point M, parallèlement à NN', du point Z comme centre, & de la distance ZC comme rayon, on décrira un cercle qui rencontrera TT' en deux points T & T', par lesquels & le point C tirant TC & $T'C$, ce seront les directions des deux axes. On déterminera ensuite la grandeur de ces axes, en abaissant les perpendiculaires MP & MP', & prenant CA égal à la moyenne proportionnelle entre CT & CP; & CD égal à la moyenne proportionnelle entre CT' & CP'; car on a vu ci-dessus (302) que $CP : CA :: CA : CT$; il est aisé de prouver (par le moyen des triangles semblables TPM & TCT', & des valeurs connues de TP, PM & CT) que $CT' = \frac{(CD)^2}{CP'}$, c'est-à-dire, que $CP' : CD :: CD : CT'$.

317. Remarquons, en finissant ce qui regarde l'ellipse, qu'on emploie souvent cette courbe dans l'architecture navale. On s'en sert pour déterminer les diamètres moyens des *vergues*; comme nous avons vu ci-dessus, qu'on s'en servoit pour les diamètres moyens des *mâts*. On l'emploie encore pour déterminer les projections des *lisses*, &c.

Dans tous ces cas on part, pour décrire l'ellipſe, de la propriété qu'a cette courbe, ſavoir que ſes ordonnées ſont proportionnelles à celles du cercle décrit ſur l'un de ſes axes. C'eſt encore ſur ce principe qu'eſt fondée la règle ſuivante que l'on donne pour conſtruire le *maître couple* d'un navire auquel on veut donner beaucoup de capacité.

Suppoſant (*fig.* 41) que AE eſt égale à la ligne du *creux*; EM perpendiculaire à AE, la demi-largeur du vaiſſeau; MF le demi-plat de la varangue; $FB = EI$ l'acculement; on décrit à part un quarré $opqr$ dont on fait le côté $op = EF$. Ayant diviſé op en un certain nombre de parties égales, & AI en un pareil nombre de parties, on mène par les points de diviſion, des perpendiculaires à op & AI; puis décrivant du point r comme centre, & du rayon ro, le quart de cercle onq, on porte la partie mn de chaque parallèle à pq, en $m'n'$ ſur la parallèle à IB, correſpondante à pareille diviſion; la courbe $An'B$ qui paſſe par tous les points n' ainſi déterminés, forme une partie du maître couple qu'on achève enſuite, pour la partie inférieure, en menant du point B au point C bord de la quille, la ligne BC, élevant ſur ſon milieu l, la perpendiculaire lk qui coupe en k la ligne Bk parallèle à AE; alors du point k comme centre & du rayon kB, on décrit l'arc de cercle BC qui touche la courbe $An'B$ au point B, parce que ſon centre k eſt ſur la perpendiculaire à la courbe $An'B$, au point B. L'autre moitié ſe conſtruit de même.

Il eſt facile de voir maintenant que la courbe dont il s'agit, eſt une ellipſe dont le demi-grand axe eſt $BT = AI$; & le demi-petit axe, eſt $AT = pq = EF$; en effet ſi

par le point (*) n' & par le point n on mène $n'n$; cette ligne ſera parallèle à AE; & puiſque les points m & m' ſont deux points de diviſion correſpondans, on aura, $om : Am' :: op : AI$; c'eſt-à-dire (en ſuppoſant que nn' rencontre or en s & AT en u), $sn : un' :: or$ ou $AT : TB$, donc les ordonnées un' de la courbe $An'B$ ſont aux ordonnées Sn du quart de cercle, toujours dans le rapport de BT à AT; donc cette courbe eſt une ellipſe: d'ailleurs il eſt facile de voir que BT & AT ſont les demi-axes. Or comme l'ellipſe rencontre perpendiculairement ſes axes, il eſt viſible que pour joindre le point B & le point C par un arc qui touche la courbe en B, il faut que le centre k de cet arc ſoit ſur la ligne TB prolongée.

De l'Hyperbole.

318. Conſidérons maintenant la courbe (*fig.* 42) qui auroit, en chacun de ſes points M, cette propriété, que la différence $Mf - MF$ des diſtances Mf & MF à deux points fixes F & f, fût toujours la même, & égale à une ligne donnée a.

Nous allons chercher, comme nous l'avons fait pour l'ellipſe, une équation qui exprime la relation entre les perpendiculaires PM menées ſur la ligne Ff, & leurs diſtances FP ou AP à quelque point fixe F ou A, pris arbitrairement ſur la ligne Ff.

Je prends donc, pour origine des abſciſſes, le

(*) Nous ſuppoſons ici, pour faciliter la démonſtration, qu'on a placé le côté op ſur le prolongement de IA.

point A déterminé en prenant depuis le milieu C de Ff, la ligne $CA = \frac{1}{2} a$, & je fais $CB = CA$. Cela posé, je nomme AP, x; PM, y; la ligne AF qui est censée connue, c; & la ligne FM, z; alors $FP = AF - AP = c - x$ (*); $fP = fA + AP = fB + AB + AP = c + a + x$; & puisqu'on a $Mf - MF = a$, on aura $Mf = a + MF = a + z$.

Les triangles rectangles FPM, fPM, donnent $(FP)^2 + (PM)^2 = (FM)^2$, & $(fP)^2 + (PM)^2 = (fM)^2$; c'est-à-dire, $cc - 2cx + xx + yy = zz$ & $cc + 2ac + aa + 2cx + 2ax + xx + yy = aa + 2az + zz$. Retranchant la première de ces deux équations, de la seconde, on a, en effaçant aa qui se trouvera de part & d'autre, $4cx + 2ac + 2ax = 2az$, d'où l'on tire $z = \frac{2cx + ac + ax}{a}$; mettant donc pour z, cette valeur dans la première équation, nous aurons $cc - 2cx + xx + yy = \frac{4ccxx + 4accx + aacc + 4acxx + 2aacx + aaxx}{aa}$, ou, chassant le dénominateur, transposant, & réduisant, $aayy = 4aacx + 4accx + 4acxx + 4ccxx$, ou $aayy = (4ac + 4cc)(ax + xx)$; d'où l'on tire $yy = \frac{4ac + 4cc}{aa}(ax + xx)$.

(*) Si le point P étoit au-delà de F par rapport à A, FP seroit $x - c$; mais cela ne changeroit rien à l'équation finale.

319. Cette équation peut servir à décrire la courbe, par des points trouvés successivement, en donnant à x plusieurs valeurs.

On peut encore décrire la courbe, par points, en prenant arbitrairement une partie Br plus grande que BF, & décrivant du point f comme centre, & du rayon Br, un arc que l'on coupera en quelque point M par un autre arc décrit du point F comme centre, & du rayon Ar.

Enfin on peut décrire cette même courbe, par un mouvement continu, de la manière suivante.

On fixera au point f, une règle indéfinie qui puisse tourner autour de ce point. Au point F & à l'un des points Q de cette règle, on attachera les extrémités d'un fil FMQ, moins long que fQ, & dont la différence avec fQ, soit égale à AB; alors par le moyen d'une pointe, ou stile M; on appliquera une partie MQ du fil, contre la règle: faisant mouvoir le stile, de M vers A, en tenant toujours le fil tendu, la règle s'abaissera, la partie FM diminuera, & le stile M décrira la courbe MA dont il s'agit, & qu'on appelle une *hyperbole*. En effet il est évident que la totalité fQ ou $fM + MQ$ étant toujours de même grandeur, & $FM + MQ$ étant aussi toujours de même grandeur, leur différence $fM + MQ - FM - MQ$, ou $fM - FM$, sera aussi toujours de même grandeur.

320. L'équation $yy = \frac{4ac + 4cc}{aa}(ax + xx)$ donnant $y = \pm \sqrt{\left[\frac{4ac + 4cc}{aa}(ax + xx)\right]}$, fait voir que pour une même abscisse AP, ou x, on a toujours deux ordonnées égales PM, PM',

qui tombent de part & d'autre du prolongement de AB, qu'on appelle le *premier axe* : ainsi la courbe a une seconde branche AM' parfaitement égale à la première ; & l'une & l'autre s'étendent à l'infini, puisqu'il est évident que plus on augmentera x, plus les deux valeurs $\pm \sqrt{\left[\frac{4ac+4cc}{aa}(ax+xx)\right]}$ augmenteront.

321. Si dans cette même quantité on fait x négatif, c'est-à-dire, si l'on suppose que le point P tombe au-dessus de A, elle deviendra $\pm \sqrt{\left[\frac{4ac+4cc}{aa}(x^2-ax)\right]}$; or $xx-ax$, ou $x(x-a)$ étant négatif tant que x est plus petit que a, la quantité $\pm \sqrt{\left[\frac{4ac+4cc}{aa}(xx-ax)\right]}$ est alors imaginaire, & par conséquent, y n'a aucune valeur réelle depuis A jusqu'à B; mais si-tôt que x surpasse a, $xx-ax$ redevenant positif, les valeurs de y redeviennent réelles ; il part donc du point B une nouvelle portion de courbe mBm' qui comme la première s'étend à l'infini de chaque côté du prolongement de AB, & qui est parfaitement égale à celle-là ; parce que si l'on prend $Bp = AP$, alors $xx-ax$ ou $Ap \times pB$ devient égal à $AP \times PB$; donc aussi pm est égal à PM.

322. Si dans l'équation $yy = \frac{4ac+4cc}{aa} \times (ax+xx)$, on fait $y = 0$, on trouvera que $ax + xx$ ou

$x.(a+x)=0$; qui donne $x=0$, & $x+a=0$ ou $x=-a$; donc la courbe rencontre l'axe AB aux deux points A & B.

323. Si l'on suppose $AP=AF$, c'est-à-dire, $x=c$, pour avoir la valeur de l'ordonnée Fm'' qui passe par le point F (qu'on appelle le *foyer*, ainsi que le point f) on aura . . . . $y=\pm\sqrt{\left[\frac{4ac+4cc}{aa}(ac+cc)\right]}=\pm\ldots\sqrt{\left[\frac{(4ac+4cc)^2}{aa}\right]}=\pm\frac{2(ac+cc)}{a}$; donc la double ordonnée $m''m'''=\frac{4(ac+cc)}{a}$: cette ligne est ce qu'on appelle le *paramètre* de l'hyperbole: ainsi en représentant cette ligne par p, on aura $p=\frac{4(ac+cc)}{a}$; & par conséquent $\frac{p}{a}=\frac{4(ac+cc)}{aa}$. Substituant dans l'équation de la courbe, on la changera en cette autre plus simple, $yy=\frac{p}{a}(ax+xx)$.

De la valeur de p, on peut conclure que *le paramètre du premier axe de l'hyperbole est plus que le quadruple de la distance du sommet* A *au foyer* F; car cette valeur $p=\frac{4ac+4cc}{a}$, se réduit à $p=4c+\frac{4cc}{a}$, qui est évidemment plus grande que $4c$.

324. Si sur le milieu C de AB, on élève une perpendiculaire DD', dont la moitié CD soit moyenne

proportionnelle entre c & $a+c$, c'eſt-à-dire, entre AF & fA, cette perpendiculaire eſt ce qu'on appelle le *ſecond axe* de l'hyperbole ; ainſi en la nommant b, on aura $\frac{bb}{4} = c.(a+c)$, ou $bb = 4ac + 4cc$; & en introduiſant cette valeur de bb dans l'équation $yy = \frac{4ac+4cc}{aa}(ax+xx)$, celle-ci ſe changera en $yy = \frac{bb}{aa}(ax+xx)$. On voit donc que ces trois équations de l'hyperbole, ne diffèrent de trois équations correſpondantes de l'ellipſe, que par le ſigne du quarré cc & du quarré xx.

Cette même équation $yy = \frac{bb}{aa}(ax+xx)$ nous fournit auſſi une propriété analogue à celle que nous avons remarquée dans l'ellipſe : en effet, ſi l'on chaſſe le dénominateur aa, on aura $aayy = bb(ax+xx)$, qui donne cette proportion, $yy : ax+xx :: bb : aa$, ou $(PM)^2 : AP \times PB :: (DD')^2 : (AB)^2$ ou $:: (CD)^2 : (AC)^2$; *le quarré d'une ordonnée au premier axe de l'hyperbole, eſt* donc *au produit* AP × BP *des deux abſciſſes, comme le quarré du ſecond axe eſt au quarré du premier ;* & par conſéquent, *les quarrés des ordonnées ſont entre eux comme les produits des abſciſſes correſpondantes.*

Lorſque les deux axes a & b ſont égaux, l'équation eſt $yy = ax + xx$ qui ne diffère de celle du

cercle que par le signe du quarré xx. L'hyperbole s'appelle alors *hyperbole équilatère*.

De l'équation $p = \frac{4ac + 4cc}{a}$, on tire $4ac + 4cc = ap$, & puisqu'on a aussi $4ac + 4cc = bb$, on a donc $ap = bb$, qui donne $a : b :: b : p$; donc le paramètre du premier axe est une troisième proportionnelle à ce premier axe, & au second.

325. Si du point D au point A on tire la droite DA, le triangle rectangle DCA donnera $DA = \sqrt{[(CD)^2 + (AC)^2]} = \sqrt{(\frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}aa)}$, ou, en mettant pour bb sa valeur $4ac + 4cc$, $DA = \sqrt{(cc + ac + \frac{1}{4}aa)} = c + \frac{1}{2}a = AF + CA = CF$; donc pour avoir les foyers quand on a les axes, il faut porter DA de C en F; & au contraire pour avoir le second axe quand on a le premier & les foyers, il faut décrire du point A comme centre & du rayon CF, un arc qui coupe la perpendiculaire DD', en quelque point D.

326. On voit aussi que la description de l'hyperbole dépend de deux quantités, savoir le grand axe & le petit axe; ou le grand axe & les foyers, ou le grand axe & le paramètre. D'après ce que nous venons de dire, on ramènera toujours aisément la description de l'hyperbole à l'une des méthodes que nous venons d'indiquer. Car si l'on donnoit, par

exemple, le grand axe & le paramètre, alors prenant une moyenne proportionnelle entre ces deux lignes, on auroit le ſecond axe qui ſerviroit à trouver les foyers.

327. Si l'on prend ſur Mf, la partie $MG = MF$, & qu'ayant tiré FG on lui mène du point M la perpendiculaire MOT, cette ligne ſera tangente à l'hyperbole, c'eſt-à-dire, ne rencontrera la courbe qu'au ſeul point M.

En effet, d'un autre point quelconque N pris ſur TM, menons aux deux foyers les droites Nf & NF, & au point G la droite NG; il eſt évident, par la conſtruction, que NF & NG ſeront égales; or Nf eſt plus petit que $NG + Gf$, & par conſéquent, plus petit que $NF + Gf$; donc $Nf - NF$ eſt plus petit que Gf, c'eſt-à-dire, que $Mf - MF$; donc le point N eſt hors de l'hyperbole: on démontrera la même choſe de tout point de TM, autre que le point M.

Les angles FMO & OMG ſont égaux, d'après la conſtruction précédente; or OMG eſt égal à ſon oppoſé NMQ; donc FMO eſt égal à NMQ; donc la ligne MF, qui va au foyer F, fait avec la tangente, le même angle que fait, avec cette même tangente, le prolongement MQ de la ligne fM qui

va à l'autre foyer. Donc, si le point F est un point lumineux, tous les rayons qui, partis du point F, tomberont sur la concavité MAM' se réfléchiront comme s'ils partoient du point f.

328. Déterminons maintenant la soutangente PT.

Puisque l'angle FMf est divisé en deux parties égales par la tangente MT, on aura (*Géom.* 104) $fM : MF :: fT : FT$; or en nommant, comme ci-dessus, MF, z, on a $fM = z + a$: d'ailleurs Ff ou $Bf + AB + AF$ valant $a + 2c$, la ligne fT ou $Ff - FT$, vaudra $a + 2c - FT$; on aura donc $z + a : z :: a + 2c - FT : FT$; donc en multipliant les extrêmes & les moyens, on aura $z \times FT + a \times FT = az + 2cz - z \times FT$; d'où, après les opérations ordinaires, on tire $FT = \frac{2cz + az}{2z + a} = \frac{(2c + a)z}{2z + a}$; or nous avons trouvé (318) $z = \frac{2cx + ac + ax}{a}$, donc $2z + a = \ldots\ldots$ $\frac{4cx + 2ac + 2ax + aa}{a} = \frac{(2c + a) . 2x + (2c + a)a}{a} = \frac{(2c + a)(2x + a)}{a}$; substituant ces valeurs dans celle de FT, on aura $FT = \frac{(2c + a) \times \frac{2cx + ac + ax}{a}}{(2c + a) \times \frac{2x + a}{a}}$, ou en supprimant le facteur commun $\frac{2c + a}{a}$, $FT = \frac{2cx + ac + ax}{2x + a}$. Ayant ainsi trouvé FT, il est

aisé d'avoir la soutangente PT; car $PT = FT - FP = FT - AF + AP = FT - c + x = \frac{2cx + ac + ax}{2x + a} - c + x = \frac{2ax + 2xx}{2x + a} = \frac{ax + xx}{x + \frac{1}{2}a}$; donc $PT = \frac{ax + xx}{x + \frac{1}{2}a}$: d'où l'on voit que l'expression de la soutangente, pour l'hyperbole, ne diffère que par les signes, de celle qu'on a eue pour l'ellipse.

329. Si de PT on retranche AP, on aura AT ou la distance du sommet jusqu'à l'endroit où la tangente rencontre l'axe. Cette distance sera donc exprimée par $\frac{ax + xx}{\frac{1}{2}a + x} - x$, qui se réduit à $AT = \frac{\frac{1}{2}ax}{\frac{1}{2}a + x}$.

330. Cette expression de AT nous donne lieu de faire quelques remarques sur la courbure de l'hyperbole. Nous avons vu ci-dessus que chacune des deux branches AM, AM' s'étendoit à l'infini. Cependant leur courbure est telle que toutes les tangentes que l'on peut mener à chacun des points de ces branches infinies, ne rencontrent jamais l'axe que dans l'intervalle compris entre A & C. En effet, si dans la valeur de AT on substitue pour x, toutes les quantités imaginables depuis o jusqu'à l'infini, la valeur de AT ne croît que depuis o jusqu'à $\frac{1}{2}a$; car quand

x est infini, le dénominateur $\frac{1}{2}a + x$ doit essentiellement être regardé comme la même chose que x, puisque si l'on conservoit alors $\frac{1}{2}a$, ce seroit supposer qu'il peut augmenter x, & détruire, par conséquent, la supposition qu'on fait que x est infini: or dans ce cas la quantité AT se réduit à $\frac{\frac{1}{2}ax}{x}$; c'est-à-dire, à $\frac{1}{2}a$; donc la tangente à l'extrémité infinie de chaque branche AM & AM', passe par le centre C. Et puisque les branches opposées Bm & Bm' sont parfaitement égales à celles-là, & que les points A & B sont également éloignés de C, il s'ensuit que ces mêmes tangentes sont aussi tangentes aux extrémités infinies des branches Bm & Bm'. On les voit (*fig.* 43) représentées par les lignes CX, CY.

331. Ces tangentes s'appellent les *asymptotes* de l'hyperbole : ce sont, comme on le voit, des lignes qui partant du centre, s'approchent sans cesse de l'hyperbole, sans pouvoir l'atteindre qu'à une distance infinie.

Si par le sommet A (*fig.* 42), on mène la droite At parallèle à PM, les triangles semblables TAt, TPM donnent $TP : PM :: TA : At$; c'est-à-dire, $\frac{ax+xx}{\frac{1}{2}a+x} : y :: \frac{\frac{1}{2}ax}{\frac{1}{2}a+x} : At = \frac{\frac{1}{2}axy}{\frac{1}{2}a+x} \times \frac{\frac{1}{2}a+x}{ax+xx} = \frac{\frac{1}{2}ay}{a+x}$, ou, en mettant pour y sa valeur $\frac{b}{a}\sqrt{(ax+xx)}$,

$At = \frac{\frac{1}{2}b\sqrt{(ax+xx)}}{a+x}$, qui, lorſque x eſt infini, devient $\frac{1}{2}b$ ou CD, parce que ax doit être ſupprimé vis-à-vis de xx, & a vis-à-vis de x. Voici donc comment on déterminera les aſymptotes. On élevera au point A (*fig.* 43) une perpendiculaire AL, que l'on prolongera de part & d'autre du point A, d'une quantité égale à CD; alors tirant par le centre C & par les deux extrémités L & L' deux lignes droites, elles feront les aſymptotes.

332. Pour avoir l'expreſſion de CT (*fig.* 42), il faut de CA retrancher AT, & l'on aura $CT = \frac{1}{2}a - \frac{\frac{1}{2}ax}{\frac{1}{2}a+x} = \frac{\frac{1}{4}aa}{\frac{1}{2}a+x} = \frac{(CA)^2}{CP}$, qui donne cette proportion $CP : CA :: CA : CT$.

333. Si l'on veut avoir l'expreſſion de TM, le triangle rectangle TPM donne $(TM)^2 = (PM)^2 + (PT)^2 = \frac{bb}{aa} \cdot (ax+xx) + \frac{(ax+xx)^2}{(\frac{1}{2}a+x)^2} = \left[\frac{bb}{aa} \cdot (\frac{1}{2}a+x)^2 + ax+xx\right] \frac{(ax+xx)}{(\frac{1}{2}a+x)^2}$.

334. Pour avoir l'expreſſion de PI ou de la ſouſnormale ; les triangles TPM, MPI (ſemblables à cauſe que l'angle TMI eſt droit, & que PM eſt une perpendiculaire abaiſſée de l'angle

droit), donneront $TP : PM :: PM : PI$, ou $\frac{ax+xx}{\frac{1}{2}a+x} : y :: y : PI = \frac{y^2(\frac{1}{2}a+x)}{ax+xx}$, ou (à cause que $y^2 = \frac{bb}{aa}.(ax+xx)$) $PI = \frac{bb}{aa}.(\frac{1}{2}a+x)$.

335. Cherchons maintenant l'équation par rapport au second axe DD'; & pour cet effet menons la perpendiculaire MP' sur ce second axe, & nommant MP', y'; DP', x'; on aura $CP' = PM = y = \frac{1}{2}b - x'$; $P'M = CP = \frac{1}{2}a + x = y'$; & par conséquent $x = y' - \frac{1}{2}a$; substituant donc pour x & y, ces valeurs, dans l'équation $yy = \frac{bb}{aa}(ax+xx)$ ou $aayy = bb(ax+xx)$, on aura, après les réductions faites, $y'y' = \frac{aa}{bb}(\frac{1}{2}bb - bx' + x'x')$; d'où l'on voit qu'il n'en est pas de l'hyperbole comme de l'ellipse; l'équation à l'égard du second axe, n'est pas semblable à celle qu'on a à l'égard du premier.

336. Enfin si l'on veut l'équation par rapport à l'axe AB, en prenant les abscisses depuis le centre C; on nommera CP, z; & l'on aura $z = CA + AP = \frac{1}{2}a + x$; & par conséquent $x = z - \frac{1}{2}a$: substituant dans l'équation $yy = \frac{bb}{aa}(ax+xx)$, on aura $yy = \frac{bb}{aa}(zz - \frac{1}{4}aa)$, pour l'équation par rapport au premier axe, les abscisses étant prises du centre.

Et à l'égard du second axe DD', si l'on nomme CP', z'; on aura $z' = CD - DP' = \frac{1}{2}b - x'$; & par conséquent $x' = \frac{1}{2}b - z'$; substituant dans l'équation $y'y' = \frac{aa}{bb}(\frac{1}{2}bb - bx' + x'x')$ que nous avons trouvée (335) pour le second axe, on aura $y'y' = \frac{aa}{bb}(z'z' + \frac{1}{4}bb)$.

337. Si l'on veut rapporter au centre C, les expressions de PT, CT, PI & TM, trouvées ci-dessus, il n'y a qu'à substituer, dans ces expressions, $z - \frac{1}{2}a$ au lieu de x, & l'on trouvera $PT = \frac{zz - \frac{1}{4}aa}{z}$, $CT = \frac{\frac{1}{4}aa}{z}$, $PI = \frac{bbz}{aa}$, $(TM)^2 = \left(\frac{bbzz}{aa} + zz - \frac{1}{4}aa\right)\frac{zz - \frac{1}{4}aa}{zz}$.

Et si l'on prolonge MT jusqu'à ce qu'elle rencontre le second axe en T', les triangles semblables TPM, TCT' donneront $TP : PM :: CT : CT'$, ou $\frac{zz - \frac{1}{4}aa}{z} : y :: \frac{\frac{1}{4}aa}{z} : CT' = \frac{\frac{1}{4}aay}{zz - \frac{1}{4}aa}$; mais $zz - \frac{1}{4}aa = \frac{aayy}{bb}$; donc $CT' = \frac{\frac{1}{4}bb}{y} = \frac{(CD)^2}{PM} = \frac{(CD)^2}{CP'}$; donc $CP' : CD :: CD : CT'$.

338. Si par le centre C de l'hyperbole (*fig.* 43) on mène une droite quelconque MCM' terminée de part & d'autre à l'hyperbole, cette droite s'appelle un *diamètre*. Toute droite mO menée d'un point m de

m de la courbe parallèlement à la tangente en M, & terminée au diamètre MM' prolongé, s'appelle une *ordonnée* à ce diamètre. MO & OM' en font les *abſciſſes*. Nous allons démontrer que les propriétés des ordonnées mO, à l'égard des diamètres terminés à la courbe, font les mêmes que celles des ordonnées MP à l'égard du premier axe.

Menons des points m & O, les perpendiculaires mp & OQ ſur l'axe AB; & du point m menons mS parallèle à AP; nommons PM, y; CP, z; Qp, g; CQ, k; nous aurons $AP = CP - CA = z - \frac{1}{2}a$; $BP = CP + BC = z + \frac{1}{2}a$; $Ap = Cp - CA = CQ - Qp - CA = k - g - \frac{1}{2}a$; $Bp = Cp + BC = k - g + \frac{1}{2}a$.

Les triangles ſemblables CPM, CQO, donnent $CP : PM :: CQ : QO$; c'eſt-à-dire, $z : y :: k : QO = \frac{ky}{z}$. Les triangles ſemblables TPM, mSO, donnent $PT : PM :: mS$ ou $Qp : SO$; c'eſt-à-dire, (337) $\frac{zz - \frac{1}{4}aa}{z} : y :: g : SO = \frac{gzy}{zz - \frac{1}{4}aa}$; donc $mp = SQ = QO - SO = \frac{ky}{z} - \frac{gzy}{zz - \frac{1}{4}aa}$; or puiſque le point m appartient à l'hyperbole, il faut (324) que $(pm)^2 : (PM)^2 :: Ap \times pB : AP \times PB$; c'eſt-à-dire, $\left(\frac{ky}{z} - \frac{gzy}{zz - \frac{1}{4}aa}\right)^2 : yy :: (k - g - \frac{1}{2}a) \times (k - g + \frac{1}{2}a) : (z - \frac{1}{2}a)(z + \frac{1}{2}a)$,

ou $\frac{kkyy}{zz} - \frac{2gkzyy}{z(zz-\frac{1}{4}aa)} + \frac{ggzzyy}{(zz-\frac{1}{4}aa)^2} : yy ::$ $kk - 2kg + gg - \frac{1}{4}aa : zz - \frac{1}{4}aa$; donc, en multipliant les extrêmes & les moyens, & faisant attention aux quantités qui se trouveront multipliées & divisées, en même temps, par $zz - \frac{1}{4}aa$, & à celles qui le seront aussi par z, on aura $\frac{kkyy}{zz}(zz-\frac{1}{4}aa)$ $- 2gkyy + \frac{ggzzyy}{zz-\frac{1}{4}aa} = kkyy - 2gkyy +$ $ggyy - \frac{1}{4}aayy$, ou, en développant le terme $\frac{kkyy}{zz}(zz-\frac{1}{4}aa)$, & supprimant $kkyy$ & $-2gkyy$ que l'on aura alors dans chaque membre, divisant de plus par yy, on aura $-\frac{1}{4}\frac{aakk}{zz} + \frac{ggzz}{zz-\frac{1}{4}aa}$ $= gg - \frac{1}{4}aa$, équation qui va nous servir à démontrer la propriété dont il s'agit; mais auparavant nous ferons observer que si de part ou d'autre du centre C, on prend sur l'axe AB la partie CR qui soit moyenne proportionnelle entre BP & AP; c'est-à-dire, telle que $(CR)^2 = AP \times PB = zz - \frac{1}{4}aa$; & si ayant élevé la perpendiculaire RN' terminée en N', par la ligne NN' menée par le centre C parallèlement à TM, on fait $CN = CN'$, alors NN' est ce qu'on appelle *un diamètre conjugué* au diamètre MM'; & l'on appelle *paramètre* du diamètre MM', une troisième proportionnelle à MM' & NN'.

Revenons maintenant à notre objet; nommons

CM, $\frac{1}{2}a'$; CN ou CN', $\frac{1}{2}b'$; CO, z'; & Om, y'. Les triangles semblables CPM, CQO, donnent $CM : CP :: CO : CQ$; c'est-à-dire, $\frac{1}{2}a' : z :: z' : k$; donc $k = \frac{zz'}{\frac{1}{2}a'}$.

Les triangles mSO & $CN'R$, semblables à cause des côtés parallèles, donnent $CN' : CR :: mO : mS$, ou $\frac{1}{2}b' : CR :: y' : g$; donc $g = \frac{CR \times y'}{\frac{1}{2}b'}$, & par conséquent $gg = \frac{CR^2 \times y'y'}{\frac{1}{4}b'b'}$, ou (puisqu'on a fait $(CR)^2 = zz - \frac{1}{4}aa$) $gg = \frac{y'y'(zz - \frac{1}{4}aa)}{\frac{1}{4}b'b'}$.

Substituons pour gg & kk, les valeurs que nous venons de trouver; substituons-les, dis-je, dans l'équation $-\frac{\frac{1}{4}aakk}{zz} + \frac{ggzz}{zz - \frac{1}{4}aa} = gg - \frac{1}{4}aa$, trouvée ci-dessus, & nous aurons $-\frac{1}{4}aa \cdot \frac{zzz'z'}{\frac{1}{4}a'a'zz} + \frac{y'y'zz(zz - \frac{1}{4}aa)}{\frac{1}{4}b'b'(zz - \frac{1}{4}aa)} = \frac{y'y'zz}{\frac{1}{4}b'b'} - \frac{\frac{1}{4}aay'y'}{\frac{1}{4}b'b'} - \frac{1}{4}aa$, ou (en réduisant & divisant ensuite par $\frac{1}{4}aa$) $\frac{-z'z'}{\frac{1}{4}a'a'} = -\frac{y'y'}{\frac{1}{4}b'b'} - 1$, ou, après les opérations ordinaires, $y'y' = \frac{b'b'}{a'a'}(z'z' - \frac{1}{4}a'a')$, équation semblable à celle qu'on a eue pour le premier axe.

339. Si l'on fait $y' = 0$, on trouve $z'z' - \frac{1}{4}a'a' = 0$, qui donne $z' = \pm \frac{1}{2}a'$; la courbe rencontre

donc la ligne MM' en deux points opposés M & M', éloignés du centre, chacun de la quantité $\frac{1}{2}a'$, ou CM; ainsi tous les diamètres sont coupés en deux parties égales au centre.

340. L'équation $y'y' = \frac{b'b'}{a'a'}(z'z' - \frac{1}{4}a'a')$ donnant $y' = \pm \frac{b'}{a'}\sqrt{(z'z' - \frac{1}{4}a'a')}$; c'est-à-dire, deux valeurs égales & de signe contraire, pour y', fait voir que si l'on prolonge mO; de manière que $Om' = Om$, le point m' appartiendra à la courbe; chaque diamètre MM' coupe donc en deux parties égales les parallèles à la tangente qui passe par son origine M.

341. La même équation donne $a'a'y'y' = b'b'(z'z' - \frac{1}{4}a'a')$, d'où l'on tire $y'y' : z'z' - \frac{1}{4}a'a' :: b'b' : a'a'$, ou $(mO)^2 : MO \times OM' :: (NN')^2 : (MM')^2$; c'est-à-dire, *le quarré d'une ordonnée quelconque* m O *à un diamètre terminé à la courbe, est au produit* M O × O M' *de ses deux abscisses, comme le quarré du diamètre conjugué, est au quarré de ce premier diamètre.*

342. Si du centre C on abaisse sur TM la perpendiculaire CF, les triangles semblables CFT, TPM, donneront $TM : PM :: CT : CF$, & par conséquent $CF = \frac{PM \times CT}{TM}$. Les triangles semblables

CRN', TPM, donneront $PT : TM :: CR : CN'$ ou CN; donc $CN = \frac{TM \times CR}{PT}$; donc $CF \times CN = \frac{PM \times CT \times TM \times CR}{TM \times PT} = \frac{PM \times CT \times CR}{PT}$, ou en quarrant, $(CF)^2 \times (CN)^2 = \frac{(PM)^2 \times (CT)^2 \times (CR)^2}{(PT)^2}$; or on a $(PM)^2 = yy = \frac{bb}{aa} \cdot (zz - \frac{1}{4}aa)$; $(CR)^2 = zz - \frac{1}{4}aa$ (338); & (337) $(CT)^2 = \frac{\frac{1}{16}a^4}{zz}$, $(PT)^2 = \frac{(zz - \frac{1}{4}aa)^2}{zz}$; subſtituant ces valeurs, on a, après les réductions faites, $(CF)^2 \times (CN)^2 = \frac{1}{16}aabb$, ou $CF \times CN = \frac{1}{4}ab$; or ſi l'on prolonge MT juſqu'à l'aſymptote, en I, MI ſera égal à CN, comme nous le verrons ci-deſſous, & $CIMN$ ſera par conſéquent, un parallélogramme dont la ſurface ſera $= CF \times MI = CF \times CN$; donc quelque part où ſoit le point M, le parallélogramme $CIMN$ ſera toujours égal en ſurface au rectangle des deux demi-axes, c'eſt-à-dire, à $\frac{1}{2}a \times \frac{1}{2}b$ ou $\frac{1}{4}ab$.

343. Les triangles ſemblables TPM & CRN' donnent $TP : PM :: CR : RN'$; donc $RN' = \frac{PM \times CR}{TP}$, & $(RN')^2 = \frac{(PM)^2 \times (CR)^2}{(TP)^2} = \frac{bbzz}{aa}$ en ſubſtituant les valeurs algébriques & réduiſant; or les triangles rectangles CPM & CRN' donnent $(CM)^2 = (CP)^2 + (PM)^2$,

& $(CN')^2$ ou $(CN)^2 = (CR)^2 + (RN')^2$; donc $(CM)^2 - (CN)^2 = (CP)^2 + (PM)^2 - (CR)^2 - (RN')^2$; ſubſtituant dans le ſecond membre, au lieu des lignes qui y entrent, leurs valeurs algébriques trouvées ci-deſſus, on aura, après les réductions faites, $(CM)^2 - (CN)^2 = \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb$; c'eſt-à-dire, que *la différence des quarrés de deux demi-diamètres conjugués quelconques, eſt toujours la même, & égale à la différence des quarrés des deux demi-axes.*

Il ſuit de-là que dans l'hyperbole équilatère, chaque diamètre eſt égal à ſon conjugué ; car ſi $a = b$, on a $(CM)^2 - (CN)^2 = 0$, & par conſéquent, $CM = CN$.

344. Si dans $(CN)^2 = (CR)^2 + (RN')^2$ on ſubſtitue pour CR & RN' leurs valeurs algébriques, on aura $(CN)^2 = zz - \frac{1}{4}aa + \frac{bbzz}{aa}$; or nous avons trouvé ci-deſſus (337), $(TM)^2 = \left(\frac{bbzz}{aa} + zz - \frac{1}{4}aa\right)\frac{zz - \frac{1}{4}aa}{zz}$; donc $(TM)^2 = \frac{zz - \frac{1}{4}aa}{zz} \times (CN)^2$; mais les triangles ſemblables MPT & $MP'T'$ donnent, en quarrant, $(PT)^2 : (TM)^2 :: (P'M)^2 : (T'M)^2$, ou $\frac{(zz - \frac{1}{4}aa)^2}{zz} : \frac{(CN)^2 \times (zz - \frac{1}{4}aa)}{zz} :: zz : (T'M)^2$;

donc $(T'M)^2 = \frac{(CN)^2 \times zz}{zz - \frac{1}{4}aa}$; donc $(TM)^2 \times (T'M)^2 = (CN)^4$, ou $TM \times T'M = (CN)^2$; mais si l'on nomme p' le paramètre du diamètre MM', on aura $2CM : 2CN :: 2CN : p'$, & par conséquent $2p' \times CM = 4(CN)^2$, ou $(CN)^2 = \frac{1}{2}p' \times CM$; donc $TM \times T'M = \frac{1}{2}p' \times CM$, d'où l'on tire $CM : TM :: T'M : \frac{1}{2}p'$.

345. De-là on peut conclure la méthode suivante pour avoir les axes de l'hyperbole, & par conséquent pour décrire cette courbe, lorsqu'on ne connoît que deux diamètres conjugués, & l'angle qu'ils font entre eux.

On prendra sur MC (*fig.* 44) une ligne $MH = \frac{1}{2}p'$, & sur le milieu I de CH on élevera une perpendiculaire IK, qui coupera en quelque point K la ligne MT' menée par le point M parallèlement au conjugué NN'. De ce point K comme centre, & d'un rayon égal à la distance de K à C, on décrira un cercle qui rencontrera MT' aux deux points T & T' par lesquels & par le centre C tirant TC & CT', ce feront les directions des axes; car il est clair, 1°. que l'angle TCT' sera droit, puisque la circonférence passe par le point C, & qu'elle a TT' pour diamètre; 2°. par la nature du cercle, on a (*Géom.* 127) $CM : TM :: T'M : MH$; donc puisqu'on a fait $MH = \frac{1}{2}p'$, on a $CM : TM :: T'M : \frac{1}{2}p'$.

Ayant ainsi déterminé les directions des axes, on en déterminera la grandeur en abaissant du point M, les perpendiculaires MP, MP', & prenant CA moyenne proportionnelle entre CP & CT; & CD' moyenne

proportionnelle entre CP' & CT'; c'eſt une ſuite des expreſſions que nous avons trouvées (337) pour CT & CT'.

Quand les deux diamètres conjugués que l'on connoît ſont égaux, alors le paramètre leur eſt égal auſſi, ce qui rend $MH = MC$; les deux points de ſection H & C ſe confondant alors, MC eſt une tangente au cercle; ainſi, il faut tout ſimplement, pour avoir le centre K, élever ſur CM une perpendiculaire au point C.

De l'Hyperbole entre ſes aſymptotes.

346. L'hyperbole conſidérée, par rapport à ſes aſymptotes, a quelques propriétés dont la connoiſſance peut être utile; nous allons les expoſer. Il faut ſe rappeller ici comment on détermine les aſymptotes; voyez (331).

Nous allons rapporter chaque point E de l'hyperbole (*fig.* 45), aux deux aſymptotes CLO, $CL'o$, en menant la ligne EQ parallèle à l'une d'entre elles; & nous chercherons la relation qu'ont entre elles les lignes EQ & CQ.

Pour trouver cette relation, nous menerons par le point quelconque E, la ligne OEo parallèle au ſecond axe DD', & la ligne ES parallèle à CLO; par le ſommet A nous tirerons AG parallèle à $CL'o$. Et nous nommerons CA, $\frac{1}{2}a$; CD ou AL ou AL', $\frac{1}{2}b$; CP, z; PE, y; AG, m; GL, n, CQ, t; QE, u.

Les triangles ſemblables, CPO, CAL, nous donnent $CA : AL :: CP : PO$, ou $\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}b$, ou $a : b :: z : PO = Po = \frac{bz}{a}$; donc $EO = \frac{bz}{a} - y$, & $Eo = \frac{bz}{a} + y$; par conſéquent $EO \times Eo = \frac{bbzz}{aa} - yy = \frac{1}{4}bb$ (en mettant pour yy ſa valeur $\frac{bb}{aa} \cdot (zz - \frac{1}{4}aa)$, & réduiſant); c'eſt-à-dire, que $EO \times Eo = (CD)^2 = (AL)^2$, propriété qui appartient à tout point de l'hyperbole, puiſque le point E a été pris arbitrairement.

347. Les triangles QEO, ESo, & AGL ſemblables entre eux, donnent $AL : AG :: EO : EQ$, & $AL : GL :: Eo : ES$; donc multipliant ces deux proportions par ordre (afin d'y introduire $EO \times Eo$, dont on a la valeur) on aura $(AL)^2 : AG \times GL :: EO \times Eo : EQ \times ES$; c'eſt-à-dire, $\frac{1}{4}bb : mn :: \frac{1}{4}bb : ut$; donc $ut = mn$; équation à l'hyperbole entre ſes aſymptotes. Ainſi en quelque point E que ce ſoit de l'hyperbole, on a toujours $EQ \times ES$, ou plutôt $EQ \times CQ = AG \times GL$.

Or ſi l'on ſuppoſe que le point E tombe en A, CQ devient CG, & QE devient AG; on a donc $CG \times AG = AG \times GL$; donc $CG = GL$. Mais le point G ſe trouvant, par-là, être le milieu de CL, on doit avoir $CG = AG = GL$; car le cercle décrit ſur CL comme diamètre (& qui auroit par

conséquent CG pour rayon), passeroit par le point A, à cause de l'angle droit A; on a donc $m = n$, & par conséquent $ut = m^2 = (CG)^2$.

Ce quarré constant m^2 ou $(CG)^2$, auquel le produit ut ou $CQ \times QE$ est toujours égal, s'appelle la *puissance* de l'hyperbole.

348. De la propriété que nous venons de démontrer, on peut déduire cette autre : *De quelque point* E *que ce soit de l'hyperbole, si l'on tire, de quelque manière que ce soit, une droite* REr *terminée aux asymptotes, les parties* RE, mr, *interceptées entre la courbe & les asymptotes, seront égales.*

Car si par le point m on mène hmH parallèle à OEo, les triangles semblables REO, & RmH donnent $ER : Rm :: EO : Hm$; & les triangles semblables rhm & roE, donnent $Er : mr :: Eo : mh$; multipliant ces deux proportions par ordre, on aura $ER \times Er : Rm \times mr :: EO \times Eo : Hm \times mh$; or les deux produits $EO \times Eo$ & $Hm \times mh$ sont égaux chacun à $(CD)^2$ (346); donc $ER \times Er = Rm \times mr$, ou $ER \times (Em + mr) = (ER + Em) \times mr$; faisant les multiplications indiquées, & supprimant, de part & d'autre, $ER \times mr$, on aura $ER \times Em = Em \times mr$; donc $ER = mr$.

349. De-là on conclura que toute tangente Te

à l'hyperbole, terminée aux asymptotes, est divisée en deux parties égales au point de contact M.

350. Si, par le point M, on tire IMi parallèle à DD', & si, par un point quelconque E, on tire REr parallèle à la tangente Tt, les triangles semblables TMI & REO donneront $TM : MI :: RE : EO$; & les triangles semblables Mit, Eor donneront Mt ou $TM : Mi :: Er : Eo$; multipliant ces deux proportions par ordre, on aura $(TM)^2 : MI \times Mi :: RE \times Er : EO \times Eo$; or les deux produits $MI \times Mi$ & $EO \times Eo$ sont chacun égal à $(CD)^2$; donc $(TM)^2 = RE \times Er$.

351. Si, du centre C, on mène le diamètre CMV, il divisera en deux parties égales la ligne Rr parallèle à Tt, puisque (349) il passe par le milieu M de Tt; nommant donc CM, $\frac{1}{2}a'$; TM, $\frac{1}{2}q$; CV, z'; l'ordonnée VE, y'; les triangles semblables CMT, CVR donneront $CM : MT :: CV : VR$; c'est-à-dire, $\frac{1}{2}a' : \frac{1}{2}q$ ou $a' : q :: z' : VR = Vr = \frac{qz'}{a'}$; donc $RE = \frac{qz'}{a'} - y'$, & $Er = \frac{qz'}{a'} + y'$; donc puisque $RE \times Er = (MT)^2 = \frac{1}{4}qq$, on aura $\frac{qqz'z'}{a'a'} - y'y' = \frac{1}{4}qq$; or (338) $y'y' = \frac{b'b'}{a'a'}(z'z' - \frac{1}{4}a'a')$; donc, en substituant, on aura $\frac{qqz'z'}{a'a'} - \frac{b'b'z'z'}{a'a'} + \frac{1}{4}b'b' = \frac{1}{4}qq$, ou $(qq - b'b')\frac{z'z'}{a'a'} = \frac{1}{4}(qq - b'b')$, ou

$(qq - b'b')\frac{\zeta'\zeta'}{a'a'} - \frac{1}{4}(qq - b'b') = 0$, ou $(qq - b'b')\left(\frac{\zeta'\zeta'}{a'a'} - \frac{1}{4}\right) = 0$; & divisant par $\frac{\zeta'\zeta'}{a'a'} - \frac{1}{4}$, on aura $qq - b'b' = 0$, qui donne $q = b'$, ou $\frac{1}{2}q = \frac{1}{2}b'$, c'est-à-dire, $MT = CN$, CN étant le demi-diamètre conjugué de CM; c'est ce que nous avons promis (342) de démontrer. On a donc (*fig.* 43) $MI = CN$.

352. On a donc aussi pour toute droite REr parallèle au conjugué CN (*fig.* 45) $RE \times Er = (CN)^2$.

353. On voit donc que, connoissant deux demi-diamètres conjugués CM, CN (*fig.* 46) & l'angle qu'ils font entre eux, il est très-facile de décrire l'hyperbole par des points trouvés successivement. En effet ce qui a été dit (349 & 351) fait voir qu'en menant par l'origine M du demi-diamètre CM la ligne TMt parallèle à CN, & prenant de part & d'autre du point M les parties MT, Mt, égales chacune à CN, si par le centre C on tire les lignes CT & Ct, elles seront les asymptotes. Et ce qui a été démontré (348) fait voir que si par le point M on tire arbitrairement tant de droites PMQ, PMQ qu'on voudra, & qu'on fasse sur chacune $PO = MQ$, les points O trouvés de cette manière, appartiendront tous à l'hyperbole cherchée.

On peut ensuite faire servir chaque point O, à en trouver d'autres tels que V, V, &c. en tirant les droites ROS, ROS, &c., & faisant $SV = RO$.

354. On voit aussi, par-là, comment, entre deux lignes données pour asymptotes, on peut décrire une hyperbole qui passe par un point donné entre ces lignes.

355. Enfin, en divisant l'angle des asymptotes & son supplément, chacun en deux parties égales, on aura les directions des deux axes, dont on déterminera la grandeur comme il a été dit (345); ce qui donne un second moyen de résoudre la question dont il s'agissoit au même endroit.

De la Parabole.

356. Il s'agit maintenant de trouver les propriétés de la courbe dont chaque point seroit aussi éloigné d'un point fixe F (*fig.* 47), que d'une droite XZ dont la position est connue, c'est-à-dire, d'une courbe telle que pour chaque point M, abaissant la perpendiculaire MH, on auroit toujours $MF = MH$.

Du point F menons FV perpendiculaire sur XZ, & partageons FV en deux parties égales en A: A sera un point de la courbe, puisque $AV = AF$; ce point est le *sommet*.

Pour trouver les propriétés de cette courbe qu'on

appelle une *parabole;* nous allons chercher une équation qui exprime la relation entre les perpendiculaires MP abaissées sur FV, & leurs distances AP au point A. Nous nommerons donc AV ou AF, c; AP, x; PM, y; alors nous aurons $VP = AV + AP = c + x = MH$; & puisque $MF = MH$, nous aurons aussi $MF = c + x$: d'ailleurs $FP = AP - AF = x - c$; or le triangle rectangle FPM donne $(FP)^2 + (PM)^2 = (FM)^2$; donc $xx - 2cx + cc + yy = cc + 2cx + xx$, donc transposant, & réduisant, $yy = 4cx$; c'est-là l'équation de la courbe, & voici ce qu'elle nous apprend.

1°. Cette équation donne $y = \pm \sqrt{4cx}$; donc, pour une même valeur de x ou AP, on a deux valeurs égales de y ou PM; mais comme l'une est positive, & l'autre négative, elles tombent de côtés opposés de la ligne indéfinie API qu'on appelle *l'axe*, c'est-à-dire, qu'elles sont PM & PM': la courbe a donc deux branches AM, AM' parfaitement égales & qui s'étendent à l'infini, puisqu'il est clair que plus x augmentera, plus $\sqrt{4cx}$, & par conséquent y, augmentera.

2°. Si l'on fait x négatif, on aura $y = \pm \sqrt{-4cx}$; c'est-à-dire, imaginaire; la courbe ne s'étend donc point au-dessus du point A.

3°. Si l'on fait $x = c$ pour avoir l'ordonnée qui

passe par le point F qu'on appelle *le foyer*, on a $y = \pm \sqrt{4cc} = \pm 2c$; c'est-à-dire, que $Fm'' = 2c$; donc $m''\, m''' = 4c$. Cette ligne $m''\, m'''$ qui passe par le foyer est ce qu'on appelle le *paramètre* de l'axe de la parabole. Ainsi le *paramètre de l'axe de la parabole est quadruple de la distance* AF *du sommet au foyer.*

4°. Donc si l'on nomme p ce paramètre, on aura $4c = p$, & l'équation de la parabole deviendra, par conséquent, $yy = px$.

357. Ayant l'équation d'une parabole, il est aisé de décrire cette courbe par des points trouvés successivement, en donnant successivement à x plusieurs valeurs, & calculant les valeurs correspondantes de y.

358. On peut encore la décrire par points, de cette autre manière : ayant choisi le point A que l'on veut prendre pour sommet & la ligne indéfinie TVI qui doit être la direction de l'axe, on prendra les parties AV, AF égales chacune à $\frac{1}{4}p$, le point F, sera le foyer ; alors on élevera sur chaque point de l'axe des perpendiculaires indéfinies MM', & traçant du point F comme centre, & de la distance VP comme rayon, deux petits arcs qui coupent chaque perpendiculaire en deux points M & M', ces

points feront à la parabole, puifque FM, qu'on fait par-là égal à VP fera égal à MH, en imaginant la droite VH perpendiculaire à l'axe. Cette droite XVH s'appelle la *directrice*.

359. Enfin on peut décrire la parabole par un mouvement continu en employant une *équerre* VHf: on attache fur un point quelconque f d'une des branches de cette équerre, l'extrémité d'un fil de longueur égale à fH; & ayant attaché l'autre extrémité au point F, on applique par le moyen d'un ftile M, une partie du fil contre fH, & tenant toujours le fil tendu, on fait gliffer l'autre côté de l'équerre, le long de ZX; le ftile M dans ce mouvement, trace la parabole MA.

360. L'équation $yy = px$, nous apprend que pour chaque point M, *le quarré de l'ordonnée* MP, *eft égal au produit de l'abfciffe correfpondante, par le paramètre.*

On voit dans cette même équation, que *les quarrés* yy *des ordonnées, font entre eux comme les abfciffes* x, c'eft-à-dire, que $(PM)^2 : (pm)^2 :: AP : Ap$; car $(PM)^2 = p \times AP$ & $(pm)^2 = p \times Ap$; donc $(PM)^2 : (pm)^2 :: p \times AP : p \times Ap :: AP : Ap$, en divifant par p.

L'équation à l'ellipfe, trouvée (286), eft

$yy = \frac{4ac - 4cc}{aa}(ax - xx)$; si l'on y suppose que le grand axe a est infini, alors xx doit être supprimé comme incapable de diminuer ax; il en est de même de $4cc$ à l'égard de $4ac$; l'équation se réduit donc à $yy = \frac{4ac \times ax}{aa} = \frac{4aacx}{aa}$; c'est-à-dire, $yy = 4cx$, qui est l'équation à la parabole; *la parabole n'est* donc *qu'une ellipse dont le grand axe est infini.*

361. Si après avoir joint les points F & H par la ligne FH, on mène du point M, sur cette ligne, la perpendiculaire MOT; cette dernière sera tangente à la parabole, c'est-à-dire, ne la rencontrera qu'au seul point M.

En effet, d'un autre point quelconque N de cette ligne, menons NF, NH; & la ligne NZ perpendiculaire sur XZ; si quelque autre point tel que N de cette ligne pouvoit appartenir à la parabole, il faudroit que $NF = NZ$; or NZ est plus petit que NH, qui, en vertu de la construction, est égal à NF.

362. L'angle FMO, étant, par cette construction, égal à OMH, lequel est égal à son opposé fMN, il s'ensuit que FMO est égal à fMN; donc les rayons de lumière partis du point F & tombant sur la concavité $M'AM$ se réfléchissent

toùs parallèlement à l'axe ; & réciproquement les rayons qui arrivent parallèlement à l'axe, vont tous se rassembler au foyer *F*.

363. La ligne *MH* étant parallèle à *VP*, les triangles *HOM*, *TOF* sont semblables, & de plus égaux, puisque *HO* est égal à *OF*; donc $FT = MH = PV = x + c$; par conséquent, $PT = FT + FP = x + c + x - c = 2x$; donc la *soutangente* PT *de la parabole est double de l'abscisse* AP.

364. Si du point *M*, on mène la perpendiculaire *MI* sur la tangente *TM*, les triangles semblables *TPM*, *PMI* donneront $TP : PM :: PM : PI$; c'est-à-dire, $2x : y :: y : PI = \frac{y^2}{2x}$, ou (à cause que $y^2 = px$), $PI = \frac{px}{2x} = \frac{1}{2} p$. *La sousnormale de la parabole, est donc la même pour chaque point, & égale à la moitié du paramètre.*

365. On emploie la parabole pour tracer le *maître couple* des vaisseaux auxquels on veut donner beaucoup de façons. On décrit un rectangle *ABCD* (*fig. 48*) dont la longueur *AB* est celle du *bau*, & la hauteur est le *creux* du navire: de part & d'autre du milieu *E* de *DC*, on prend *EG*, *EH* égales chacune au demi-plat de la varangue, & ayant mené *GM* & *HL* perpendiculaires à *DC* & égales chacune à l'acculement, on décrit deux paraboles égales *AM*, *BL* qui aient leurs sommets en *A* & en *B*, pour axe commun la ligne *AB*, & dont la première passe par *M* & la seconde par *L*.

Pour pouvoir tracer ces paraboles, il faut connoître leur paramètre; or si l'on prolonge *GM* jusqu'à ce qu'elle rencontre *AB* en *P*, alors *MP* sera une ordonnée, & *AP* l'abscisse correspondante; mais l'équation $yy = px$, faisant voir que l'ordonnée est moyenne proportionnelle entre l'abscisse & le paramètre, nous indique que pour trouver le paramètre, on peut tirer *AM* & à son extrémité *M*, élever une perpendiculaire *MK* qui rencontrera *AB* au point *K*, & déterminera *KP* pour ce paramètre; car à cause de l'angle droit *AMK*, la perpendiculaire *PM* est moyenne proportionnelle entre *AP* & *PK*. Ayant déterminé ainsi le paramètre, il sera facile d'avoir tant de points de la parabole que l'on voudra par la méthode donnée (358).

Lorsque ces paraboles sont tracées, on achève le plat de la varangue, en employant deux arcs de cercle dont l'un *MO* tourne sa convexité en bas, & l'autre *OS* la tourne en haut; mais il faut, non-seulement, que les deux arcs *MO* & *OS* se touchent (ce qui est aisé d'après ce qui a été dit en Géométrie 49); il faut encore que *MO* touche la parabole en *M*; c'est ce qui aura lieu si le centre de l'arc *MO* est en quelque point *R* de la perpendiculaire *MI* à la parabole; or nous venons de voir (364) que pour déterminer cette perpendiculaire, il falloit prendre la sousnormale *PI* égale à la moitié du paramètre; il n'y aura donc qu'à tirer du point *M*, au milieu *I* de *PK* la ligne *MI*, & prendre le centre de l'arc *MO* sur cette droite *MI*. On prend ordinairement ce centre de manière que le point *O*, où l'arc *MO* rencontre la ligne *MS* tirée au bord *S* de la quille, soit le milieu de *MS*; c'est pourquoi ayant pris *MF* & *FO* égales chacune au quart de *MS*, on élevera du point *F* sur *MS* la perpendiculaire *FR* qui déterminera

le centre R de l'arc MO, puis par le point R & le point O, on tirera RO que l'on prolongera de la quantité OT égale à RO; & le point T sera le centre de l'arc OS; ensorte que les deux arcs MO & OS se toucheront en O, & le premier touchera la parabole en M. L'autre moitié s'achève de même.

366. Toute ligne MX (*fig.* 49) tirée d'un point M de la parabole, parallèlement à l'axe AQ, s'appelle un *diamètre*; chaque diamètre a son *paramètre*, qui est en général le quadruple de la distance MF de l'origine de ce diamètre, au foyer. Toute droite mO menée d'un point m de la parabole, parallèlement à la tangente TM qui passe par l'origine ou le sommet M de ce diamètre, s'appelle une *ordonnée* à ce diamètre. Nous allons voir que les ordonnées à un diamètre quelconque, ont la même propriété que les ordonnées à l'axe.

Menons l'ordonnée MP à l'axe, & des points m & O, menons-lui les parallèles mp, OQ; enfin du point m, menons mS parallèle à l'axe. Nommons AP, x; PM, y; Qp, g; AQ, k. Nous aurons $Ap = k - g$. Les triangles semblables TPM, mSO, donnent $TP : PM :: mS : SO$; c'est-à-dire, $2x : y :: g : SO = \frac{gy}{2x}$; donc $pm = QS = QO - SO = PM - SO = y - \frac{gy}{2x}$; or puisque le point m appartient à la parabole, il faut

(360) que $(pm)^2 : (PM)^2 :: Ap : AP$; c'est-à-dire, $\left(y - \frac{gy}{2x}\right)^2 : yy :: k - g : x$, ou $yy - \frac{2gyy}{2x} + \frac{ggyy}{4xx} : yy :: k - g : x$; donc, en multipliant les extrêmes & les moyens, on a $xyy - gyy + \frac{ggyy}{4x} = kyy - gyy$, qui se réduit (en divisant par yy, & supprimant les termes qui sont les mêmes de part & d'autre) à $x + \frac{gg}{4x} = k$ ou $\frac{gg}{4x} = k - x$.

Nommons maintenant l'abscisse MO, x'; & l'ordonnée mO, y'. Nous aurons $MO = PQ = AQ - AP = k - x$; donc $x' = k - x$; & par conséquent $\frac{gg}{4x} = x'$, ou $gg = 4xx'$, mais le triangle rectangle mSO, donne $(mS)^2 + (SO)^2 = (mO)^2$; c'est-à-dire, $gg + \frac{ggyy}{4xx} = y'y'$. Mettant donc pour gg sa valeur $4xx'$, & pour yy sa valeur px, on aura, après les réductions faites, $4xx' + px' = y'y'$, ou $(4x + p)x' = y'y'$. Mais si on appelle p' le paramètre du diamètre MX, on aura $p' = 4FM = 4x + 4c = 4x + p$; donc enfin $p'x' = y'y'$. L'équation à l'égard d'un diamètre quelconque est donc la même qu'à l'égard de l'axe. *Le quarré de l'ordonnée* mO *à un diamètre quelconque* MX, *est donc égal au produit de l'abscisse par le paramètre de ce diamètre; & les quarrés des ordonnées à un*

diamètre quelconque de la parabole sont entre eux comme les abscisses correspondantes.

367. Il suit, de tout ce qui précède, que si l'on veut décrire une parabole qui ait une ligne indéfinie MX pour diamètre, une ligne donnée p' pour paramètre de ce diamètre, & dont les ordonnées fassent un angle donné avec ce même diamètre; on tirera par l'origine M une ligne NMT, faisant avec MX l'angle NMX égal à l'angle donné. Par le même point M, on mènera MF faisant de l'autre part avec MT l'angle FMT égal à NMX; & ayant fait $MF = \frac{1}{4}p'$, le point F sera le foyer de la parabole (362 & 366); tirant donc par le point F la ligne indéfinie TFQ parallèle à MX, & qui rencontre TM en T, ce sera la direction de l'axe, dont on déterminera le sommet A en abaissant la perpendiculaire MP, & partageant PT en deux parties égales en A (363). Alors ayant le foyer & le sommet, il sera facile de décrire la parabole (358 & 359).

368. Les trois courbes que nous venons de considérer successivement, ont été nommées *sections coniques*, parce qu'on les obtient en coupant un cône par un plan. Par exemple, on a l'ellipse $AMmB$ (*fig.* 50) si l'on coupe le cône CHI par un plan AMm, de manière que ce plan rencontre

les deux côtés CH, CI en deçà du sommet C: il faut seulement en excepter le cas où ce plan feroit avec le côté CI le même angle que fait l'autre côté CH avec la base; dans ce cas la section est un cercle.

Si au contraire le plan coupant ne rencontre l'un des côtés CH qu'autant que celui-ci sera prolongé, on a l'hyperbole AMm (*fig.* 51).

Enfin on a la parabole, si le plan coupant est parallèle à l'un CH des côtes du cône (*fig.* 52): en voici la démonstration.

Concevons le cône CHI (*fig.* 50 & 51) coupé par un plan qui passe par la droite qui joindroit le sommet C, & le centre du cercle qui sert de base; c'est-à-dire, par un plan qui passe par l'axe du cône: la section sera un triangle. Coupons maintenant le cône par trois plans AMm, FMG, HmI perpendiculaires à ce triangle, & dont les deux derniers soient parallèles à la base du cône. Les deux sections FMG, HmI seront des cercles (*Géom.* 199), qui rencontreront la section AMm en M & en m. Les intersections FG, HI des plans de ces cercles, avec le triangle par l'axe, seront les diamètres de ces mêmes cercles. Les intersections PM, pm de ces cercles, avec le plan AMm seront (*Géom.* 188)

perpendiculaires au plan du triangle par l'axe, & seront en même temps ordonnées de ces cercles, & de la section *AMm.*

Cela posé, les triangles semblables APG, ApI donnent $AP : Ap :: PG : pI$, & les triangles semblables BFP, BHp donnent $PB:pB::FP:Hp$; multipliant ces deux proportions par ordre, on a $AP \times PB : Ap \times pB :: FP \times PG : Hp \times pI$; or par la nature du cercle $FP \times PG = (PM)^2$, & $Hp \times pI = (pm)^2$; donc $AP \times PB : Ap \times pB :: (PM)^2 : (pm)^2$; donc les quarrés des ordonnées de la section AMm sont entre eux comme les produits des abscisses; or ces abscisses tombent de différens côtés de l'ordonnée (*fig.* 50), & d'un même côté (*fig.* 51); donc AMm (*fig.* 50) est une ellipse, & (*fig.* 51) une hyperbole.

Quant à la figure 52, en supposant les mêmes choses que ci-dessus, on a, par la nature du cercle, $(PM)^2 = FP \times PG$, $(pm)^2 = Hp \times pI$, ou (à cause des parallèles Pp, FH, & FP, Hp qui donnent $FP = Hp$) $(pm)^2 = FP \times pI$; donc $(PM)^2 : (pm)^2 :: FP \times PG : FP \times pI :: PG : pI :: AP : Ap$, à cause des triangles semblables APG, ApI; donc les quarrés des ordonnées sont entre eux comme les abscisses; donc la courbe est une parabole.

Réflexions sur les Équations aux Sections coniques.

369. Il suit de ce que nous avons démontré (309) que si dans l'ellipse, on nomme x, l'abscisse CO (*fig. 38*) prise depuis le centre sur le diamètre MM'; y l'ordonnée mO parallèle au diamètre conjugué CN, on aura $yy = \frac{bb}{aa}$ $(\frac{1}{4}aa - xx)$ pour l'équation à ce diamètre, quelque angle que fassent d'ailleurs ces deux diamètres conjugués. Et si, par le point m, on mène mO' parallèle à MM' & qui sera alors une ordonnée au diamètre NN'; alors nommant CO', x'; & mO', y'; on aura $y = x'$ & $x = y'$; & l'équation deviendra $x'x' = \frac{bb}{aa}$ $(\frac{1}{4}aa - y'y')$; d'où l'on tire $y'y'$ $= \frac{aa}{bb}$ $(\frac{1}{4}bb - x'x')$. C'est-à-dire, qu'en prenant les abscisses du centre, l'équation, par rapport à quelque diamètre que ce soit, est toujours de même forme, tant qu'on prend les ordonnées parallèles au diamètre conjugué.

Si b est égal à a, l'équation devient $yy = \frac{1}{4}aa - xx$, que nous avons vu (285) appartenir au cercle. Mais il faut bien faire attention que c'est en supposant les ordonnées perpendiculaires au diamètre; car lorsqu'elles font tout autre angle qu'un angle droit, l'équation $yy = \frac{1}{4}aa - xx$ appartient à l'ellipse rapportée aux diamètres conjugués égaux.

Pour l'hyperbole, si l'on nomme x, l'abscisse CO (*fig. 43*) prise depuis le centre sur le diamètre MM' terminé à la courbe, & y l'ordonnée mO parallèle au diamètre conjugué NN', on aura (338) $yy = \frac{bb}{aa} \times (xx - \frac{1}{4}aa)$ pour l'équation à ce diamètre, quel que soit d'ailleurs l'angle

compris entre les deux diamètres conjugués. Mais si menant, par le point m', la ligne $m'O'$ parallèle au diamètre CM, on nomme y' la ligne $m'O'$, qui est alors une ordonnée au diamètre NN'; & si l'on nomme x' l'abscisse CO', on aura $x' = y$, & $y' = x$, ce qui changera l'équation en $x'x' = \frac{bb}{aa}(y'y' - \frac{1}{4}aa)$ qui donne $y'y' = \frac{aa}{bb}(x'x' + \frac{1}{4}bb)$; d'où l'on voit que l'équation, par rapport au diamètre conjugué NN', n'est pas semblable à celle que l'on trouve pour le diamètre MM' terminé à la courbe.

A l'égard de la parabole, nous avons vu (366) qu'en prenant les abscisses sur un diamètre quelconque, depuis l'origine de ce diamètre, & prenant les ordonnées parallèles à la tangente au sommet de ce diamètre, l'équation étoit toujours $yy = px$, en nommant y l'ordonnée, x l'abscisse & p le paramètre de ce diamètre.

Enfin à l'égard de l'hyperbole considérée, par rapport à ses asymptotes, en prenant les abscisses depuis le centre, sur une des asymptotes, & les ordonnées parallèles à l'autre asymptote, nommant les premières x, les secondes y, & aa la puissance de l'hyperbole, l'équation de l'hyperbole sous ce dernier aspect est $xy = aa$.

370. Mais il faut bien remarquer que pour que ces équations se rapportent aux lignes auxquelles nous venons de les rapporter, il est essentiel que l'une des indéterminées, que y, par exemple, se compte depuis la ligne même sur laquelle les x sont comptés; car on pourroit avoir une équation de quelqu'une des formes que nous venons de parcourir, & qui cependant ne se rapporteroit point aux diamètres conjugués, si cette équation est à l'ellipse ou à l'hyperbole; ou qui lorsqu'elle appartient à une parabole, n'exprimeroit point

la relation entre les abſciſſes & ce que nous avons appelé juſqu'ici les *ordonnées*; par exemple, ſi (*fig.* 53) CM', CN ſont deux demi-diamètres conjugués de l'ellipſe, à l'égard deſquels on ait l'équation $yy = \frac{bb}{aa}(\frac{1}{4}aa - xx)$, CM' étant $\frac{1}{2}a$; CN, $\frac{1}{2}b$; CQ, x; & QM, y; ſi par le centre C on tire une droite indéfinie FCE qui rencontre les ordonnées QM en E; ſi l'on nomme les lignes CE, z; qu'enfin par un point B pris à une diſtance connue $BC = m$, on mène BF parallèle à QM, & qu'on nomme CF, n; alors les triangles ſemblables CBF, CQE, donnent $m : n :: x : z$, donc $x = \frac{mz}{n}$; ſi on ſubſtitue cette valeur de x dans l'équation ci-deſſus, elle deviendra. . . . .
$yy = \frac{bb}{aa}\left(\frac{1}{4}aa - \frac{mmzz}{nn}\right)$ ou $aannyy = \frac{1}{4}aabbnn - bbmmzz$, ou (en diviſant le ſecond membre par $bbmm$ & indiquant en même temps la multiplication par $bbmm$) $aannyy = bbmm\left(\frac{\frac{1}{4}aann}{mm} - zz\right)$, ou enfin $yy = \frac{bbmm}{aann}\left(\frac{\frac{1}{4}aann}{mm} - zz\right)$, équation de même forme, mais que l'on auroit tort, comme on le voit, de regarder comme appartenant aux diamètres conjugués; car les abſciſſes z étant priſes ſur CE, les ordonnées y ou QM ſe comptent du point Q où la ligne EM parallèle à CN rencontre CM'.

371. On voit donc, en général, 1°. que ſi l'on a une équation du ſecond degré, à deux indéterminés x & y, & ſi l'une des indéterminées ſe compte depuis la ligne ſur laquelle l'autre ſe compte, cette équation appartiendra à l'ellipſe rapportée à ſes diamètres conjugués, ou au cercle, ſi ne renfermant d'autres puiſſances de x & y que les quarrés, ces deux quarrés ſe trouvent avec différens ſignes dans différens membres, & ſi en même temps la quantité toute

connue qui ſe trouve dans un même membre avec le quarré qui aura le ſigne $-$, a elle-même le ſigne $+$; car ſi l'on avoit, par exemple, $yy = \frac{bb}{aa}\left(-\frac{1}{4}aa - xx\right)$; cette équation n'exprimeroit aucune ligne poſſible ; puiſqu'elle donne $y = \pm \sqrt{\left[\frac{bb}{aa}\left(-\frac{1}{4}aa - xx\right)\right]}$, quantité abſurde (98).

372. 2°. Si les deux quarrés yy & xx, paſſés dans différens membres, ont le même ſigne, & s'il n'y a d'autres puiſſances de x & de y que ces quarrés, l'équation appartiendra toujours à une hyperbole, laquelle ſera rapportée à un diamètre terminé à la courbe ou à ſon conjugué ſelon que le terme tout connu, aura le même ſigne que les quarrés xx & yy, ou des ſignes différens.

373. 3°. Si l'équation ne renferme que l'un des quarrés & n'a que deux termes dont le ſecond ſoit le produit de l'autre indéterminée, par une quantité connue, elle appartiendra à une parabole rapportée à l'un de ſes diamètres, ſi ces deux termes placés dans différens membres ont le même ſigne; mais s'ils ont différens ſignes, l'équation n'exprime aucune ligne poſſible.

374. 4°. Enfin ſi l'équation n'ayant que deux termes, l'un eſt le produit des deux indéterminées x & y, & l'autre une quantité toute connue, elle exprime une hyperbole rapportée à ſes aſymptotes.

375. Telles ſont les équations aux ſections coniques rapportées aux différentes lignes auxquelles nous venons de les rapporter. Nous en verrons l'uſage dans peu; mais il n'eſt pas inutile de dire d'avance que toutes les fois qu'on aura une équation à deux indéterminées x & y qui aura les conditions que nous venons d'expoſer, il ſera toujours facile

de construire la section conique à laquelle elle appartiendra, & cela en se conduisant comme dans cet exemple,

Supposons qu'on ait l'équation $ncd - qyy = gxx$; je l'écrirois ainsi $qyy = ncd - gxx$; divisant le second membre par g & indiquant, en même temps, la multiplication par g, $qyy = g\left(\frac{ncd}{g} - xx\right)$, & enfin $yy = \frac{g}{q}\left(\frac{ncd}{g} - xx\right)$; or sous cette forme, je vois (309 & 371) que cette équation appartient à une ellipse dont le rapport des quarrés de deux diamètres conjugués est $\frac{g}{q}$, & dont le quarré de celui de ces diamètres sur lequel les x sont comptés, est $\frac{4ncd}{g}$. En effet, comparant cette équation, à l'équation..... $yy = \frac{bb}{aa}(\frac{1}{4}aa - xx)$; j'ai $\frac{bb}{aa} = \frac{g}{q}$, & $\frac{1}{4}aa = \frac{ncd}{g}$. De ces deux équations, on tire $a = \sqrt{\frac{4ncd}{g}}$, & $b = \sqrt{\frac{4ncd}{q}}$, ce qui détermine les deux diamètres conjugués. Quant à l'angle que font ces deux diamètres conjugués, c'est celui que font les lignes x & y, angle qui est censé connu par la question qui aura conduit à l'équation $ncd - qyy = gxx$. Or nous avons vu (316) comment, connoissant ces trois choses, on peut décrire l'ellipse.

On se conduira de même pour les équations aux autres sections, lorsqu'elles se rapporteront à quelques-unes de celles que nous avons exposées ci-dessus. Nous allons voir qu'en général toute équation du second degré à deux indéterminées, exprime toujours une section conique, ou n'exprime aucune ligne possible (*); & cela se démontre en faisant

(*) Il faut seulement en excepter le cas où elle seroit le produit de deux facteurs du premier degré tels que $ax + by + c$ & $dx + fy + g$; auquel cas même, elle n'est pas réellement du second degré; mais ce cas ne pouvant nous servir, nous ne nous en occuperons point.

voir que toute équation pareille peut toujours être ramenée à quelqu'une de celles que nous avons données ci-dessus. Nous allons en donner la méthode; mais pour répandre plus de jour sur l'usage de cette méthode & sur les constructions auxquelles elle conduit, il est à propos de placer ici les réflexions suivantes.

376. Puisque toute question qui peut être résolue par l'Algèbre conduit toujours à une ou plusieurs équations, toute équation à deux indéterminées, u & t, peut toujours être considérée comme venant d'une question où ces deux indéterminées u & t représentoient les deux inconnues. Quelle qu'ait été cette question, on peut toujours considérer l'équation comme exprimant la nature d'une courbe; & cela est bien facile à concevoir; car si l'on donne arbitrairement & successivement à l'une des deux inconnues, à u, par exemple, plusieurs valeurs; & qu'à l'aide de l'équation & des règles de l'Algèbre, on calcule à chaque fois la valeur de t, il est évident que rien n'empêche de marquer sur une ligne indéfinie AR (*fig.* 53, 54 & 55) les valeurs AP, AP, &c. qu'on a données à u, de mener par les points P, P, &c. des lignes PM, PM, &c. parallèles entre elles & sous un angle déterminé, & de faire ces dernières égales aux valeurs correspondantes qu'on a trouvées pour t: la suite des points M, M, &c. déterminés de cette manière, formera une courbe dont la nature dépendra du rapport des lignes AP & PM, & puisque ce rapport est exprimé par l'équation dont ces lignes ont été déduites, cette équation exprime donc la nature de cette courbe.

Cela posé, concevons que la courbe soit une section conique: il est clair que, comme dans la question qui a donné cette équation, on ignoroit, ou l'on pouvoit ignorer

totalement si un pareil usage de cette équation donneroit une section conique, on n'a pas cherché à disposer les lignes *AP* & *PM* de manière que l'une ayant sa direction sur un diamètre, l'autre fût parallèle à la tangente menée par le sommet de ce diamètre, ce qui est d'abord nécessaire pour que l'équation ait l'une des formes ci-dessus. On voit donc par-là comment il peut se faire qu'une équation, quoique n'ayant pas l'une de ces formes, appartienne néanmoins à une section conique.

377. Voyons donc maintenant comment on peut ramener toute équation du second degré, & qui renferme deux indéterminées, à avoir l'une des formes que nous avons vues appartenir aux sections coniques rapportées aux lignes auxquelles nous les avons rapportées (369).

378. La méthode que nous allons exposer, suppose qu'on sache faire disparoître le second terme dans une équation du second degré à une inconnue. La règle pour cette opération est simple: il faut égaler l'inconnue augmentée (ou diminuée si le second terme a le signe —) de la moitié du coëfficient ou multiplicateur de x dans le second terme, à une nouvelle inconnue, après avoir préalablement dégagé le quarré de l'inconnue.

Par exemple, pour faire disparoître le second terme de l'équation $4x^2 + 12x = 9$, je divise par 4, & j'ai $x^2 + 3x = \frac{9}{4}$; je fais $x + \frac{3}{2} = z$; en quarrant, j'ai $x^2 + 3x + \frac{9}{4} = zz$, & par conséquent $x^2 + 3x = zz - \frac{9}{4}$; substituant dans l'équation $x^2 + 3x = \frac{9}{4}$, j'ai $zz - \frac{9}{4} = \frac{9}{4}$, ou $zz = \frac{18}{4}$, équation qui n'a plus de second terme.

Si j'avois $x^2 - 4x = 7$, je ferois $x - 2 = z$; quarrant, j'aurois $x^2 - 4x + 4 = zz$, ou $x^2 - 4x = zz - 4$;

d'où, en fubftituant, il vient $zz - 4 = 7$, ou $zz = 11$, équation fans fecond terme.

379. On peut même, fi on le veut, égaler l'inconnue augmentée de la moitié du coëfficient du fecond terme; non à une inconnue fimple, mais à une inconnue multipliée ou divifée par une quantité arbitraire; & cette remarque nous fervira dans quelques momens.

Par exemple, dans l'équation $x^2 - 4x = 7$, au lieu de faire fimplement $x - 2 = z$, comme ci-deffus, je puis faire $x - 2 = \frac{k}{n} z$; j'aurai, en opérant toujours de la même manière, $x^2 - 4x + 4 = \frac{kk}{nn} zz$, & par conféquent $x^2 - 4x = \frac{kk}{nn} zz - 4$; d'où, en fubftituant, on tire $\frac{kk}{nn} zz - 4 = 7$, & par conféquent $\frac{kk}{nn} zz = 11$: on n'en aura pas moins la même valeur pour x, quelque valeur qu'on donne à k & à n; en effet cette équation donne $\frac{k}{n} z = \sqrt{11}$; & puifque $x - 2 = \frac{k}{n} z$, on a $x - 2 = \sqrt{11}$; précifément comme par le premier procédé. En un mot, cela ne change rien à ce que l'on cherche; mais en introduifant ainfi une quantité arbitraire, on fe ménage les moyens de remplir certaines vues, auxquelles on ne fatisferoit quelquefois que d'une manière indirecte, ou moins fimple, en s'y prenant autrement.

Moyens de ramener aux Sections coniques, toute Équation du fecond degré à deux indéterminées, lorfqu'elle exprime une chofe poffible.

380. Suppofons qu'on ait l'équation $dtt + cut + euu + fdt + geu + hd^2 = 0$, qui renferme toutes les équations du

du second degré à deux indéterminées u & t, dont aucun terme ne manque. Concevons que cette équation appartienne à une courbe MM (*fig.* 53 & 54) dont AP & PM sont les coordonnées. Voici comment on s'assurera que cette courbe est toujours une section conique, & comment on déterminera cette section.

Il faut, lorsqu'il ne manque aucun des deux quarrés t^2 & u^2, faire disparoître successivement, le second terme de cette équation par rapport à t, & le second terme par rapport à u, ce que l'on fera de la manière suivante.

Après avoir renfermé entre deux crochets tout ce qui multiplie la première puissance de t, je dégage tt, & j'ai $tt + \left(f + \frac{cu}{d}\right)t + \frac{euu}{d} + \frac{geu}{d} + hd = 0 \ldots (A)$. Je fais donc (378) $t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$; en quarrant, j'aurai $tt + \left(f + \frac{cu}{d}\right)t + \frac{1}{4}ff + \frac{fcu}{2d} + \frac{ccuu}{4dd} = yy$, & par conséquent $tt + \left(f + \frac{cu}{d}\right)t = yy - \frac{1}{4}ff - \frac{fcu}{2d} - \frac{ccuu}{4dd}$: substituant dans l'équation (A), & transposant ensuite pour laisser yy seul; j'ai $yy = \frac{1}{4}ff + \frac{fcu}{2d} + \frac{ccuu}{4dd} - \frac{euu}{d} - \frac{geu}{d} - hd$, ou, en multipliant tout par $4dd$, & rassemblant ensuite les termes qui sont multipliés par des puissances semblables de u, $4ddyy = ffdd - 4hd^3 + (2cfd - 4ged)u + (cc - 4de)uu$.

Comme les quantités d, c, e, f, &c. représentent des quantités connues, on peut, pour abréger le calcul, représenter $ffdd - 4hd^3$ par une seule lettre r; représenter de même, $2cfd - 4ged$, par q; & $cc - 4de$, par m; l'équation deviendra $4ddyy = r + qu + mu^2$, m, q, r pouvant être positives ou négatives.

Faisons maintenant disparoître le second terme par rapport à u; & pour cet effet, commençons par dégager uu, ce qui donne $u^2 + \frac{q}{m}u + \frac{r}{m} = \frac{4dd}{m}yy \ldots (B)$. Mais, au lieu de faire simplement $u + \frac{q}{2m} =$ à une nouvelle indéterminée x, selon la règle donnée (378), je le fais $= \frac{qx}{2mn}$ (379); c'est-à-dire, égal à une nouvelle indéterminée x multipliée par la moitié du coëfficient du second terme, & divisée par une quantité arbitraire n inconnue pour le moment, mais que nous déterminerons dans peu (*).

J'ai donc $u + \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$; quarrant, il me vient $uu + \frac{qu}{m} + \frac{qq}{4mm} = \frac{qqxx}{4mmnn}$, ou $uu + \frac{qu}{m} = \frac{qqxx}{4mmnn} - \frac{qq}{4mm}$. Substituant dans l'équation (B), j'ai $\frac{qqxx}{4mmnn} - \frac{qq}{4mm} + \frac{r}{m} = \frac{4dd}{m}yy$, équation qui appartient à l'ellipse ou à l'hyperbole, tant qu'aucune des quantités d, m, q, r, &c. n'est zéro; excepté le cas où nous allons voir qu'elle n'exprimeroit aucune ligne possible.

Examinons maintenant dans quels cas la courbe est une ellipse, dans quels cas une hyperbole, & enfin dans quels cas il n'y a pas de courbe.

Pour cet effet, dégageons yy, & nous aurons $yy = \frac{qqxx}{16mnndd} - \frac{qq}{16mdd} + \frac{r}{4dd}$, ou, en divisant le second

(*) Cette quantité n est introduite pour pouvoir ramener directement l'équation, aux diamètres conjugués. Si l'on égaloit simplement à x, l'équation finale acquerroit la forme de l'équation à l'ellipse ou à l'hyperbole, mais elle seroit dans le cas que nous avons examiné (370).

membre par le coëfficient de xx, & indiquant en même temps la multiplication par ce même coëfficient, $yy = \frac{qq}{16mnndd}\left(xx - nn + \frac{4mrnn}{qq}\right)$, équation dans laquelle les quantités q, n & d étant au quarré, les signes ne peuvent changer que lorsque m ou r, au lieu d'être positifs, seront négatifs; mais le changement du signe de r n'en apportant aucun à ceux des quarrés yy & xx, la courbe ne change point par le changement du signe de r. A l'égard de m, s'il est négatif, l'équation est alors $yy = \frac{qq}{-16mnndd} \times \left(xx - nn - \frac{4mrnn}{qq}\right)$, ou (en changeant les signes en haut & en bas) $yy = \frac{qq}{16mnndd} \times \left(nn + \frac{4mrnn}{qq} - xx\right)$. On voit donc (371 & 372) que tant que m sera positif, la courbe sera une hyperbole; & qu'au contraire, elle sera une ellipse, quand m sera négatif; or la quantité m a représenté ci-dessus $cc - 4de$, & dans cette dernière, la quantité c étant au quarré, cc est toujours positif, donc m ou $cc - 4de$ ne peut devenir négatif qu'autant que $4de$ surpassera cc, & cela, soit que d & e soient tous deux positifs, soit qu'ils soient tous deux négatifs.

381. Donc *si l'on veut savoir dans quels cas une équation du second degré, à deux indéterminées* u *&* t, *telle que* $dt^2 + cut + eu^2 + fdt + geu + hd^2 = 0$, *appartient à l'ellipse ou à l'hyperbole, il n'y a qu'à examiner si le quarré* cc *du coëfficient du terme* ut, *moins le quadruple du produit* de *des coëfficiens de* t^2 *& de* u^2, *fait une quantité positive ou négative; dans le premier cas, la courbe sera une hyperbole; & dans le second cas, une ellipse, à moins que* d *ne soit* = e; *alors la courbe peut être un cercle, ainsi qu'on le verra plus bas.*

Il faut seulement excepter de cette règle, le cas où r étant

négatif, feroit plus grand que $\frac{qq}{4m}$ pour l'ellipfe; car alors la quantité $nn + \frac{4mrnn}{qq}$ devenant $nn - \frac{4mrnn}{qq}$, ou $nn\left(1 - \frac{4mr}{qq}\right)$, eft négative fi $\frac{4mr}{qq}$ eft plus grand que 1; ou, ce qui revient au même, fi $4mr$ eft plus grand que qq, ou enfin fi r eft plus grand que $\frac{qq}{4m}$, ce qui rend la valeur de y, & par conféquent la courbe, imaginaire.

Il refte à faire voir comment on peut décrire l'ellipfe & l'hyperbole que nous venons de reconnoître: confidérons l'ellipfe.

382. Des deux équations $t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$, & $u + \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$, que nous avons eues pour faire difparoître les feconds termes, la feconde, par la fuppofition actuelle, que m eft négative, fe change en $u - \frac{q}{2m} = \frac{-qx}{2mn}$; mais comme n eft une quantité introduite arbitrairement, on peut la fuppofer indifféremment pofitive ou négative; en la fuppofant négative, on a $u - \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$; conftruifons ces deux équations pour avoir la pofition des diamètres conjugués.

La première, favoir $t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$, fait voir que pour avoir y, il faut augmenter chaque t de la quantité $\frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d}$; on menera donc, par le point A, origine des u & des t, (*fig.* 53) la ligne $AB = \frac{1}{2}f$, parallèle aux lignes PM ou t. Par le point B, on menera BKI parallèle à la ligne AR, fur laquelle fe comptent les u, & ayant pris arbitrairement la ligne BK, on menera parallèlement à AB, la ligne KL qui foit à BK :: $\frac{1}{2}c$: d; fi l'on tire par les

points B & L la ligne indéfinie BLQ, alors les lignes QM comptées des points Q où cette ligne coupe les lignes PM, feront les valeurs de y. En effet, on a $QM = PM + PQ = PM + PI + IQ = t + \frac{1}{2}f + IQ$; or les triangles semblables BKL & BIQ, donnent $BK : KL :: BI$ ou $AP : IQ$; c'est-à-dire, $d : \frac{1}{2}c :: u : IQ = \frac{cu}{2d}$; donc $QM = t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$. Puisque les y se comptent depuis la ligne LQ, il s'ensuit (370) que pour que l'équation à l'ellipse, trouvée ci-dessus, appartienne aux diamètres conjugués, les x doivent être comptés sur la ligne BLQ, & que le point d'où ils seront comptés, sera le centre; ensorte que QLB est la direction d'un des diamètres. Voyons à déterminer ce centre.

La seconde équation $u - \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$, fait voir que si sur AP ou u, on prend $AG = \frac{q}{2m}$, la quantité GP qui vaut $AP - AG$, vaudra $u - \frac{q}{2m}$, & par conséquent $\frac{qx}{2mn}$, on a donc $GP = \frac{qx}{2mn}$; or si par le point G, on mène NGC parallèle aux lignes PM, le point C où elle rencontrera LQ, sera l'origine des x, & par conséquent le centre; en effet, nous venons de voir que les x devoient être comptés sur LQ; or, lorsque GP est zéro, sa valeur $\frac{qx}{2mn}$ doit être zéro; x doit donc être zéro alors, ce qui ne peut avoir lieu que lorsque les x commenceront au point C: ainsi les lignes QM étant y, les lignes CQ sont x. De-là il est facile d'avoir la valeur de n; car on a $GP = \frac{qx}{2mn}$, ou (en mettant pour x, sa valeur CQ, & pour $\frac{q}{2m}$, sa

valeur AG) $GP = \frac{AG \times CQ}{n}$; donc $n = \frac{AG \times CQ}{GP}$; mais les parallèles QP, CG & AB, donnent $GP : AG :: CQ : BC = \frac{AG \times CQ}{GP}$; on a donc $n = BC$; c'eſt-à-dire, que pour que l'équation à l'ellipſe, trouvée ci-deſſus, appartienne aux diamètres conjugués dont les directions ſont QB & CN, il faut mettre pour n, la valeur de BC, qui eſt déterminée par les conſtructions précédentes.

Il ne reſte donc plus, pour être en état de décrire cette ellipſe, qu'à déterminer la grandeur des diamètres conjugués; car l'angle BCN qu'ils font entre eux, ſe trouve déterminé par les opérations précédentes. Or cela eſt facile, en imitant ce que nous avons fait (375). Il ne s'agit que de comparer l'équation $yy = \frac{qq}{16mddnn}\left(nn + \frac{4mnnr}{qq} - xx\right)$, à l'équation $yy = \frac{bb}{aa}(\frac{1}{4}aa - xx)$. Cette comparaiſon donne $\frac{bb}{aa} = \frac{qq}{16mddnn}$ & $\frac{1}{4}aa = nn + \frac{4mnnr}{qq}$; donc $a = \sqrt{\left(4nn + \frac{16mnnr}{qq}\right)}$, & $b = \sqrt{\left(\frac{qq}{4mdd} + \frac{r}{dd}\right)}$; & puiſque n, m, q, r, d ſont toutes des quantités connues, on a donc les valeurs des diamètres conjugués a & b, avec leſquelles, & connoiſſant d'ailleurs l'angle BCN qu'ils doivent faire, on décrira l'ellipſe de la manière qui a été enſeignée (316).

383. Remarquons que ſi les valeurs de a & de b ſont égales, & qu'en même temps l'angle BCN ſoit droit, la courbe eſt alors un cercle. Si l'on veut déterminer dans quels cas cela aura lieu, il n'y a, 1°. qu'à ſuppoſer dans notre équation à l'ellipſe, que $\frac{qq}{16mddnn} = 1$, c'eſt-à-dire

que $qq = 16mddnn$, ce qui donne $nn = \frac{qq}{16mdd}$. 2°. Si l'angle BCD eſt droit, on doit avoir $(BC)^2 + (CD)^2 = (BD)^2 = (AG)^2$; or $BC = n$; & les triangles ſemblables, BCD, BLK, donnent $BK : KL :: BD$ ou $AG : CD$, c'eſt-à-dire, $d : \frac{1}{2}c :: \frac{q}{2m} : CD$, d'où l'on tire $CD = \frac{qc}{4md}$; donc $\frac{qq}{16mdd} + \frac{qqcc}{16mmdd} = \frac{qq}{4mm}$, ou $m + cc = 4dd$; mais puiſque m eſt négatif, on a $cc - 4de = -m$, ou $m = 4de - cc$; il faudra donc que $4de = 4dd$, ou que $d = e$.

384. On voit donc que *pour ſavoir ſi la courbe eſt un cercle, une ellipſe, ou une hyperbole*, il eſt inutile d'avoir égard aux trois derniers termes fdt, geu, & hd^2 de l'équation, $dt^2 + cut + eu^2 + fdt + geu + hd^2 = 0$; cela dépend ſeulement des trois premiers, enſorte que ſi d, c & e ſont tels que $cc - 4de$ ſoit poſitif, la courbe ſera une hyperbole; elle ſera une ellipſe, ſi au contraire $cc - 4de$ eſt négatif, excepté le cas où l'on aura en même temps $d = e$, c'eſt-à-dire, où les deux quarrés u^2 & t^2 auront le même coëfficient; alors elle ſera un cercle ſi l'angle des nouvelles coordonnées eſt droit.

385. Tout ce que nous venons de dire, à l'exception de ce que renferme le n°. 383, s'applique également à l'hyperbole, c'eſt-à-dire, à l'équation $yy = \frac{qq}{16mnndd}\left(xx - nn + \frac{4mrnn}{qq}\right)$, à la différence des ſignes près. Ainſi en reliſant tout ce qui précède & l'appliquant à la figure 54, il n'y a d'autre changement à faire que de porter AG à l'oppoſite de AP, ce qui eſt indiqué par l'équation $u + \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$,

que l'on a eue d'abord (380). Du reste, tout est le même, en changeant le mot *ellipse* en celui d'*hyperbole*.

Dans les différens cas particuliers, les quantités AG, BK, AB, KL (*fig.* 53 & 54), peuvent se trouver disposées tout au contraire de ce qu'on le voit ici; mais ces changemens seront toujours indiqués par les signes des quantités d, c, f, m, q, &c. dans les équations $t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$, & $u + \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$ que l'on a en faisant disparoître les seconds termes.

386. Il nous reste deux cas à examiner: ce sont, 1°. celui où l'on auroit $cc - 4de = 0$; 2°. celui où l'on auroit tout à la fois $d = 0$, & $e = 0$.

Dans le premier cas, c'est-à-dire, lorsque $cc - 4de = 0$, ou $cc = 4de$, la courbe est une parabole. Comme la quantité m est alors zéro, la construction précédente devient inutile; parce qu'après avoir fait évanouir le second terme par rapport à t, le terme u^2 ne s'y trouve plus. Ce cas se reconnoît facilement en examinant si dans l'équation, on a $cc = 4de$, c'est-à-dire, si les trois termes t^2, ut & u^2 forment un quarré; car de ce que $cc = 4de$, on déduit $c = 2\sqrt{de}$, ce qui change les trois premiers termes de l'équation, en $dt^2 + 2ut\sqrt{de} + eu^2$, qui est le quarré de $t\sqrt{d} + u\sqrt{e}$.

Dans ce cas on fera, comme ci-devant, disparoître le second terme, par rapport à t, & alors l'équation se réduira en opérant mot à mot, comme ci-dessus, à $4ddyy = r + qu$; alors pour ramener cette dernière à la forme $yy = px$, qui (369) est celle de la parabole rapportée à un diamètre dont les ordonnées sont parallèles à la tangente au sommet de ce diamètre, on dégagera yy, ce qui

donne $yy = \frac{r+qu}{4dd}$; on fera ce second membre égal à une nouvelle indéterminée x, multipliée par un nombre n que l'on déterminera comme on va le voir; c'est-à-dire, qu'on fera $\frac{r+qu}{4dd} = nx$; alors on aura $yy = nx$. Il ne s'agira donc plus que de construire l'équation $t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$, qui a servi à faire disparoître le second terme, par rapport à t, & l'équation $\frac{r+qu}{4dd} = nx$, qui aura servi à la seconde réduction. La première de ces deux équations étant précisément la même que celle que nous avons construite (382), se construira de même ici; ainsi il n'y a qu'à appliquer à la figure 55, mot à mot, ce qui a été dit (382) pour la figure 53 relativement à la construction de $t + \frac{1}{2}f + \frac{cu}{2d} = y$, les y seront les lignes QM (*fig.* 55), & l'on aura BLQ pour la direction du diamètre sur lequel les x doivent être comptés.

Pour déterminer l'origine des x, & par conséquent le sommet de ce diamètre, on emploiera l'équation $\frac{r+qu}{4dd} = nx$, qui donnant $u + \frac{r}{q} = \frac{4ddnx}{q}$, fait voir que si l'on prend à l'opposite de AP, la quantité $AG = \frac{r}{q}$, on aura $GP = \frac{4ddnx}{q}$; puisque $GP = AP + AG = u + \frac{r}{q} = \frac{4ddnx}{q}$; donc si par le point G on mène GCD parallèle aux lignes PM, & qui rencontre QLB en C, le point C sera l'origine des x, puisque l'équation $GP = \frac{4ddnx}{q}$ fait voir que quand GP est zéro, x doit être zéro, & que d'ailleurs les x devant être comptés sur

la ligne de laquelle partent les y, doivent être comptés sur BQ.

Il ne s'agit plus que de déterminer le paramètre n. Or on vient de voir que $GP = \frac{4ddnx}{q}$; mais les parallèles CD & QI donnent $BC : BD$ ou $AG :: CQ : DI$ ou GP; c'est-à-dire, $BC : \frac{r}{q} :: x : \frac{4ddnx}{q}$; donc $BC = \frac{r}{4ddn}$; donc $n = \frac{r}{4BC \times dd}$; or r & d sont donnés dans l'équation, & BC est déterminé par la construction; on connoît donc n ou le paramètre; d'ailleurs cette même construction détermine en même temps l'angle des coordonnées CQ & QM ou x & y; il est donc aisé de construire la parabole selon qu'il a été enseigné (367).

387. Puisque l'équation générale appartient à la parabole lorsqu'on a $cc = 4de$, il s'ensuit que lorsque le produit ut des deux indéterminées ne se trouve point dans cette équation, il faut pour qu'elle appartienne à la parabole, qu'il y manque aussi un des deux quarrés t^2 ou u^2; car c étant alors zéro, l'équation $cc = 4de$ ou $0 = 4de$, fait voir que d ou $e = 0$.

388. Si les deux quarrés sont tous deux dans l'équation, & que le produit ut ne s'y trouve point, alors la construction donnée (382) & qui convient aux figures 53 & 54, devient plus simple, parce c étant zéro, la ligne KL est zéro, & BL tombe sur BK, qui devient alors un diamètre, les lignes des x & des y sont donc parallèles à celles des u & des t. Dans ce même cas l'évanouissement du second terme par rapport à u se fera sans employer l'inconnue n, parce que BC qui est n (382) étant alors égal à BD ou

AG, on a $n = \frac{q}{2m}$, ce qui réduit l'équation $u + \frac{q}{2m} = \frac{qx}{2mn}$ qu'on a eue pour faire disparoître le second terme, par rapport à u, à celle-ci $u + \frac{q}{2m} = x$.

Il suit de-là, qu'outre les conditions mentionnées (384), il faut dans le cas présent, pour que la courbe soit un cercle, que l'angle des coordonnées u & t soit droit.

389. Lorsque le produit ut se trouve dans l'équation, si après avoir fait évanouir le second terme par rapport à l'une des deux indéterminées, par exemple, par rapport à t, il ne se trouvoit plus d'autre puissance de l'indéterminée u, que le quarré, alors quoiqu'il n'y ait plus de second terme à faire disparoître, il n'en faudroit pas moins faire une transformation qui consisteroit à faire $u = \frac{lx}{n}$, $\frac{l}{n}$ étant une fraction inconnue, mais que l'on détermineroit lors de la construction, d'une manière semblable à ce que nous venons de faire (382). Nous en donnerons un exemple plus bas.

390. Si des trois termes t^2, ut & u^2, il ne manque que l'un des deux quarrés, l'équation appartient toujours à une hyperbole, ou n'exprime aucune courbe; parce que si d ou e est zéro, la quantité $cc - 4de$ se réduisant à cc, est essentiellement positive (384).

391. Enfin si les deux quarrés t^2 & u^2 manquent en même temps, auquel cas on a une équation de cette forme, $gut + ht - ku - l = 0$; g, h, k, l pouvant être indifféremment positifs ou négatifs, on ne peut encore faire usage de la construction donnée (382). L'équation appartient à l'hyperbole rapportée à ses asymptotes; mais comme les

abscisses & les ordonnées ne sont point comptées du centre, on les y ramènera de la manière suivante.

On dégagera le produit ut; ce qui donnera $ut + \frac{ht}{g} - \frac{ku}{g} - \frac{l}{g} = 0$. On fera la somme des quantités qui multiplient u égale à une indéterminée y, c'est-à-dire, $t - \frac{k}{g} = y$; ce qui donne $t = y + \frac{k}{g}$; substituant dans l'équation $ut + \frac{ht}{g}$, &c. $= 0$; on aura $uy + \frac{hy}{g} + \frac{hk}{gg} - \frac{l}{g} = 0$; après cette transformation, on fera la somme de toutes les quantités qui multiplient y, égale à une nouvelle indéterminée x, c'est-à-dire, $u + \frac{h}{g} = x$, ce qui réduira l'équation à $xy + \frac{hk}{gg} - \frac{l}{g} = 0$, ou $xy = \frac{l}{g} - \frac{hk}{gg}$ qui appartient à l'hyperbole entre ses asymptotes, les abscisses x étant comptées depuis le centre sur une des asymptotes, & les ordonnées y étant comptées depuis cette asymptote parallèlement à l'autre; enfin la puissance de cette hyperbole est $\frac{l}{g} - \frac{hk}{gg}$ (347).

Pour construire cette hyperbole, on construira, de la manière suivante, les deux équations $t - \frac{k}{g} = y$, & $u + \frac{h}{g} = x$ qui ont servi à réduire. La première fait voir qu'il faut diminuer chaque t de la quantité $\frac{k}{g}$ pour avoir y. On menera donc par le point A (*fig.* 56) origine des u & des t, une ligne AB parallèle aux lignes PM ou t, & égale à $\frac{k}{g}$: tirant ensuite par le point B la ligne CBQ parallèle à AP, les lignes QM seront les y, puisque $QM = PM - PQ = PM - AB = t - \frac{k}{g} = y$.

Pour avoir les x, l'équation $u + \frac{h}{g}$ fait voir qu'il faut augmenter les u, c'est-à-dire, les lignes AP, de la quantité $\frac{h}{g}$; on portera donc à l'oppofite de AP, la ligne $AG = \frac{h}{g}$, & tirant GS parallèle aux lignes PM & qui rencontre BQ en C, CQ fera x & C fera le centre de l'hyperbole dont CQ & CS feront les afymptotes: ayant les afymptotes & l'équation $xy = \frac{l}{g} - \frac{hk}{gg}$, on décrira l'hyperbole de la manière qui a été enfeignée (354).

Si les trois premiers termes t^2, ut & u^2 manquoient dans l'équation, alors elle n'exprimeroit plus qu'une ligne droite dont la conftruction eft facile, après ce que nous avons dit fur la conftruction des équations qui ont fervi aux réductions précédentes.

392. Ainfi, 1°. toute équation du fecond degré à deux indéterminées, & qui n'eft point décompofable en deux facteurs du premier degré, tels que $mx + ny + q$, exprime toujours une fection conique, ou n'exprime aucune courbe poffible. 2°. Cette courbe eft ellipfe, ou hyperbole, ou parabole, felon que le quarré du coëfficient du produit ut des deux indéterminés, moins le quadruple du produit des coëfficiens des deux quarrés t^2 & u^2 eft négatif, ou pofitif, ou zéro; & en particulier elle peut être un cercle, lorfque ce même réfultat étant négatif, les coëfficiens de u^2 & de t^2 font égaux. 3°. Et pour ramener toute équation appartenante à une fection conique, aux équations que nous avons données en traitant de ces courbes, il faut fe conformer à ce qui a été enfeigné (380, 386, 388, 389 & 391).

Application de ce qui précède, à la résolution de quelques questions indéterminées.

393. Pour faire connoître l'usage des transformations que nous venons d'enseigner, proposons-nous pour première question, de *Trouver quelle est la courbe* (fig. 57) *dont les distances de chaque point* M *à deux points fixes* A *&* B *seroient toujours dans un même rapport, marqué par celui de* g à h.

Imaginons que de chaque point M, on ait abaissé une perpendiculaire MP sur la ligne AB; cherchons la relation de ces perpendiculaires, avec leurs distances AP au point A; & pour cet effet nommons AP, u; PM, t, & la ligne connue $AB = c$.

Cela posé, le triangle rectangle APM donne $AM = \sqrt{[(AP)^2 + (PM)^2]} = \sqrt{(uu + tt)}$, & le triangle rectangle BPM donne $BM = \sqrt{[(BP)^2 + (PM)^2]}$; or $BP = AP - AB = u - c$; donc $BM = \sqrt{(u^2 - 2cu + cc + tt)}$; puis donc que l'on veut que $AM : BM :: g : h$, on aura $\sqrt{(uu + tt)} : \sqrt{(u^2 - 2cu + cc + tt)} :: g : h$; donc $h\sqrt{(uu + tt)} = g\sqrt{(u^2 - 2cu + cc + tt)}$, ou, en quarrant, $hhuu + hhtt = gguu - 2ggcu + ggcc + ggtt$, ou $(gg - hh)\,uu + (gg - hh)\,tt - 2ggcu + ggcc = 0$, équation qui (384) appartient au cercle, puisque les deux quarrés uu & tt, ont, dans le même membre, le même signe & le même coëfficient.

Pour ramenèr cette équation à la forme $yy = \frac{1}{4}aa - xx$ (369), je vois que n'y ayant point de second terme par rapport à t, il suffit à l'égard de cette indéterminée, de supposer $t = y$, ce qui donne $(gg - hh)\,uu + (gg - hh)yy - 2ggcu + ggcc = 0$; il faut donc, à présent,

faire disparoître le second terme par rapport à u; & comme le produit ut ne se trouve point dans l'équation, il suffit (388) d'employer la règle donnée (378). Je dégage donc uu, & j'ai $uu - \frac{2ggcu}{gg-hh} = \frac{-ggcc}{gg-hh} - yy$; je fais $u - \frac{ggc}{gg-hh} = x$; quarrant, & substituant au lieu du premier membre uu — &c., sa valeur $xx - \frac{g^4cc}{(gg-hh)^2}$ qu'on aura par cette opération, il me vient $xx - \frac{g^4cc}{(gg-hh)^2} = \frac{-ggcc}{gg-hh} - yy$, ou $yy = \frac{hhggcc}{(gg-hh)^2} - xx$, équation qui étant comparée à l'équation $yy = \frac{1}{4}aa - xx$, me donne $\frac{1}{4}aa = \frac{hhggcc}{(gg-hh)^2}$, & par conséquent le rayon $\frac{1}{2}a = \frac{hgc}{g^2-h^2}$. Il ne s'agit donc plus que de déterminer le centre, qui doit être sur ABP, puisqu'on a $t = y$. Or l'équation $u - \frac{ggc}{gg-hh} = x$, qui a servi à réduire, fait voir que pour avoir x, il faut diminuer u de la quantité $\frac{ggc}{gg-hh}$; on prendra donc $AC = \frac{ggc}{gg-hh}$, & alors CP sera x, puisqu'il vaut $AP - AC$, c'est-à-dire, $u - \frac{ggc}{gg-hh}$; ainsi du point C comme centre, & du rayon $\frac{hgc}{g^2-h^2}$ on décrira un cercle; chaque point M de ce cercle aura la propriété dont il s'agit.

Au reste, on peut trouver le centre & le rayon d'une manière assez simple, par le moyen de la première équation $uu - \frac{2g^2cu}{gg-hh} = \frac{-ggcc}{gg-hh} - yy$; car puisque le centre doit être sur AP, ainsi qu'on vient de le remarquer, si l'on fait $y = 0$, on aura, en résolvant l'équation, les deux valeurs de u qui expriment les distances AD, AE

auxquelles le cercle DME rencontre la droite AB; prenant donc le milieu de DE, on aura le centre & le rayon CE. Or si l'on résout l'équation $u^2 - \frac{2g^2cu}{gg-hh} = \frac{-ggcc}{gg-hh}$, on aura $u = \frac{g^2c}{gg-hh} \pm \sqrt{\frac{gghhcc}{(gg-hh)^2}} = \frac{g^2c \pm ghc}{gg-hh} = \frac{gc(g \pm h)}{(g-h)(g+h)}$ qui donne ces deux valeurs $u = \frac{gc}{g+h} = AD$, & $u = \frac{gc}{g-h} = AE$.

394. Nous prendrons pour seconde question, celle-ci; *Trouver hors de la ligne donnée* AR (fig. 58) *tous les différens points* M, *tels qu'en tirant aux deux points* A & R, *les lignes* MA, MR, *l'angle* AMR *soit toujours égal à un même angle donné.*

Représentons par r le rayon des tables, & par m la tangente de l'angle donné, auquel AMR doit être égal; abaissons la perpendiculaire MP; nommons AP, u; PM, t; AR, b: alors PR sera $b - u$.

Rappelons-nous ces trois propositions démontrées (*Géom.* 284, 285 & 278), savoir, que si A & B sont deux angles, on a

1°. *sin.* $(A + B) = \frac{\text{sin. } A \text{ cos. } B + \text{sin. } B \text{ cos. } A}{r}$;

2°. *cos.* $(A + B) = \frac{\text{cos. } A \text{ cos. } B - \text{sin. } A \text{ sin. } B}{r}$;

3°. *tang.* $(A + B) = \frac{r \text{ sin. } (A+B)}{\text{cos. } (A+B)}$.

Cela posé, les triangles rectangles APM, RPM donnent (*Géom.* 295) $AM : AP :: r :$ *sin.* AMP; $AM : PM :: r :$ *sin.* MAP ou *cos.* AMP; $RM : RP :: r :$ *sin.* RMP; $RM : PM :: r :$ *sin.* MRP ou *cos.* RMP; d'où l'on tire

sin.

$\text{fin.}\, AMP = \frac{r \times AP}{AM}$; $\text{cof.}\, AMP = \frac{r \times PM}{AM}$; $\text{fin.}\, RMP = \frac{r \times RP}{RM}$; $\text{cof.}\, RMP = \frac{r \times PM}{RM}$; donc puifque $AMR = AMP + RMP$, on aura, par les formules qu'on vient de rappeler, $\text{fin.}\, AMR = \frac{r \times AP \times PM + r \times RP \times PM}{AM \times RM} = \frac{r \times AR \times PM}{AM \times RM}$, & $\text{cof.}\, AMR = \frac{r \times \overline{PM}^2 - r \times AP \times RP}{AM \times RM}$; donc $\frac{r\, \text{fin.}\, AMR}{\text{cof.}\, AMR}$, ou $\text{tang.}\, AMR = \frac{r \times AR \times PM}{PM^2 - AP \times RP}$; ou, en mettant les valeurs algébriques, & réduifant, $m = \frac{rbt}{tt - bu + uu}$; ou $mtt + muu - mbu - rbt = 0$, équation au cercle (384), ainfi qu'on devoit bien s'y attendre.

Pour déterminer le centre & le rayon, il faut ramener cette équation à la forme $yy = \frac{1}{4}aa - xx$. Pour cet effet, je dégage tt, ce qui me donne $tt - \frac{rb}{m}t - bu + uu = 0$; je fais (378) $t - \frac{rb}{2m} = y$; opérant comme à l'article cité, mon équation fe change en $yy - \frac{rrbb}{4mm} - bu + uu = 0$. Refte donc à faire difparoître le fecond terme, par rapport à u; & puifque le produit ut n'entre point dans l'équation, je fais (388) fimplement $u - \frac{b}{2} = x$; opérant de la même manière, l'équation devient $yy - \frac{rrbb}{4mm} + xx - \frac{bb}{4} = 0$, ou $yy = \frac{bb}{4} + \frac{rrbb}{4mm} - xx$, qui étant comparée avec l'équation $yy = \frac{1}{4}aa - xx$, me donne $\frac{1}{4}aa = \frac{bb}{4} + \frac{rrbb}{4mm}$, & par conféquent le rayon $\frac{1}{2}a = \sqrt{\left(\frac{bb}{4} + \frac{rrbb}{4mm}\right)}$.

Pour trouver le centre, & déterminer en même temps ce rayon, l'équation $t - \frac{rb}{2m} = y$, m'apprend que si je mène AB parallèle à PM, c'est-à-dire, si j'élève au point A la perpendiculaire $AB = \frac{rb}{2m}$, & si je mène BCQ parallèle à AR, les lignes QM seront y, puisque $QM = PM - PQ = PM - AB = t - \frac{rb}{2m} = y$. Mais l'équation $u - \frac{b}{2} = x$, me fait voir que si je prends sur AR la partie $AG = \frac{b}{2}$, GP sera x, puisque $GP = AP - AG = u - \frac{b}{2} = x$; donc si par le point G, je mène GC parallèle à PM, le point C sera le centre. D'ailleurs, si l'on tire AC, on aura, à cause de l'angle droit G, $AC = \sqrt{[(AG)^2 + (GC)^2]} = \sqrt{\left(\frac{bb}{4} + \frac{rrbb}{4mm}\right)}$; AC sera donc le rayon.

Cette construction se réduit donc à élever sur le milieu de AR la perpendiculaire $GC = \frac{rb}{2m}$, & à décrire du point C comme centre & du rayon CA, un cercle: tout angle MAR qui aura son sommet à la circonférence de ce cercle, & qui passera par les points A & R, sera égal à l'angle donné. Or pour construire la quantité $\frac{rb}{2m}$, il n'y a autre chose à faire qu'à mener une droite AO, qui fasse avec AB l'angle BAO égal à l'angle donné, elle coupera GC au point cherché C; car dans le triangle rectangle ABC, on a $r : tang.\ BAC :: AB : BC$ ou AG; c'est-à-dire, $r : m :: AB : \frac{1}{2}b$; donc AB ou $GC = \frac{rb}{2m}$.

On peut voir encore aisément, que tout se réduit à mener par le point A la ligne AO qui fasse avec AR,

l'angle *RAO* égal au complément de l'angle donné : cette ligne coupera en *C* la perpendiculaire élevée sur le milieu de *AR* ; ensorte que *C* sera le centre, & *CA* le rayon.

395. De-là il est facile de résoudre la question suivante : *Connoissant la position des trois points* R, A, R′ (fig. 59), *& les angles sous lesquels on voit les lignes* RA, AR′, *d'un certain point* M, *trouver ce point* M.

Sur les milieux *G* & *G′* des deux lignes *RA* & *R′A*, on élevera les perpendiculaires *GC* & *G′C′* ; par le point *A*, on menera les lignes *AC* & *AC′* faisant avec *AR* & *AR′*, chacune avec chacune, les angles *RAC*, *R′AC′* égaux chacun au complément de l'angle *RMA*, *R′MA* sous lequel la ligne correspondante est vue. Des points *C* & *C′* comme centres, & des rayons *CA* & *C′A*, on décrira deux cercles qui se couperont en *A* & en *M* : le point *M* sera le point cherché. C'est une suite évidente de la solution de la question précédente.

Ce problême peut servir à marquer, sur la carte d'un pays, la position d'un point d'où l'on a relevé trois objets connus.

Si les angles observés *RMA*, *R′MA* étoient égaux aux angles *RR′A* & *R′RA*, alors le problême ne seroit plus déterminé, les deux cercles se confondroient, & chaque point de leur circonférence satisferoit à la question.

396. Pour troisième question, il s'agira de trouver la courbe ou les courbes qui auroient la propriété suivante : *AZ*, *AT* (fig. 60), *sont deux lignes qui font entre elles un angle donné quelconque, il s'agit de trouver les courbes dont la distance de chaque point* M *à un point fixe* F *pris sur* AZ,

soit toujours dans un même rapport avec la distance MT *du même point* M *à la droite* AT, *cette distance étant mesurée parallèlement à* AZ.

D'un point quelconque M de cette courbe, imaginons la ligne MP parallèle à AT, & la perpendiculaire MS sur AZ; l'angle MPS est donné; c'est pourquoi son sinus & son cosinus sont censés connus; nous les nommerons p & q, en représentant par r le rayon des tables (*). Nommons AP, u, & PM, t; la ligne connue AF, c.

Cela posé, dans le triangle rectangle, MPS, nous aurons (*Géom.* 295) r : *sin.* MPS :: MP : MS, & r : *sin.* PMS ou *cos.* MPS :: PM : PS; c'est-à-dire, $r : p :: t : MS = \frac{pt}{r}$, & $r : q :: t : PS = \frac{qt}{r}$. Donc $FS = PS - PF = PS - AP + AF = \frac{qt}{r} - u + c$; or le triangle rectangle MSF donne $MF = \sqrt{[(MS)^2 + (FS)^2]}$; donc $MF =$ . . . . $\sqrt{\left(\frac{p^2t^2}{r^2} + \frac{q^2t^2}{r^2} - \frac{2qut}{r} + u^2 + \frac{2qct}{r} - 2cu + cc\right)}$; ou (parce que (*Géom.* 281) $p^2 + q^2 = r^2$) on aura $MF = \sqrt{\left(t^2 - \frac{2qut}{r} + u^2 + \frac{2qct}{r} - 2cu + cc\right)}$; puis donc que MF doit être à MT ou AP, dans un rapport donné, si l'on représente ce rapport par celui de g à h, on aura $\sqrt{\left(t^2 - \frac{2qut}{r} + u^2 + \frac{2qct}{r} - 2cu + cc\right)} : u :: g : h$, &

(*) On peut supposer, comme nous le faisons ici, que les quantités p, q, r sont données par les Tables de Trigonométrie; mais on peut les déterminer par une construction simple en faisant un triangle rectangle qui ait un de ses angles aigus égal à l'angle donné MPS, & une hypothénuse telle que l'on voudra. En prenant celle-ci pour r, les deux autres côtés seront p & q.

par conféquent, $gu = h\sqrt{\left(t^2 - \frac{2qut}{r} + u^2 + \frac{2qct}{r} - 2cu + cc\right)}$, ou en quarrant, & tranfpofant enfuite, $h^2t^2 - \frac{2qh^2ut}{r} + (h^2 - g^2)u^2 + \frac{2ch^2qt}{r} - 2ch^2u + h^2c^2 = 0$, équation qui renferme les fections coniques (380), & qui (392) appartiendra à l'ellipfe fi le quarré de $-\frac{2qh^2}{r}$, moins le quadruple de h^2 multiplié par $h^2 - g^2$ eft négatif; c'eft-à-dire, fi $\frac{4q^2h^4}{r^2} - 4h^4 + 4h^2g^2$ ou $\frac{4q^2h^4 - 4r^2h^4 + 4r^2h^2g^2}{r^2}$ eft négatif; ou (parce que $r^2 - q^2 = p^2$) fi $\frac{4r^2h^2g^2 - 4p^2h^4}{r^2}$ eft négatif: au contraire, elle appartiendra à l'hyperbole, fi $\frac{4r^2h^2g^2 - 4p^2h^4}{r^2}$ eft pofitif. Elle fera à la parabole, fi $\frac{4r^2h^2g^2 - 4p^2h^4}{r^2}$ eft zéro; c'eft-à-dire, fi $4r^2h^2g^2 = 4p^2h^4$, ou fi $rg = ph$, enfin la courbe fera un cercle, lorfqu'on aura $h^2 = h^2 - g^2$, ce qui ne peut jamais avoir lieu qu'autant que g fera zéro, ou que h fera infini, parce que dans ce dernier cas on doit négliger g^2 vis-à-vis de h^2.

Si l'on veut maintenant conftruire la courbe dans chacun de ces cas, il n'y a qu'à imiter ce que nous avons fait (380 & *fuiv.*); comme nous avons, alors, opéré fur l'ellipfe, pour faire voir la fimilitude des opérations & des conftructions à l'égard de ces deux courbes, nous allons ici appliquer à l'hyperbole ce qui a été fait au même endroit cité, c'eft-à-dire, chercher à ramener notre équation à la forme $yy = \frac{bb}{aa}(xx - \frac{1}{4}aa)$.

Je dégage donc t^2 dans l'équation trouvée ci-deffus, ce qui me donne $t^2 + \left(\frac{2cq}{r} - \frac{2qu}{r}\right)t + \left(1 - \frac{g^2}{h^2}\right)u^2 - 2cu + c^2 = 0$. Pour faire difparoître le fecond terme,

par rapport à t, je fais $t + \frac{cq}{r} - \frac{qu}{r} = y$, ce qui en quarrant, & transposant ensuite, me donne $t^2 + \left(\frac{2cq}{r} - \frac{2qu}{r}\right) t = yy - \frac{c^2q^2}{r^2} + \frac{2cq^2u}{r^2} - \frac{q^2u^2}{r^2}$, & par conséquent, en substituant, $yy - \frac{c^2q^2}{r^2} + \frac{2cq^2u}{r^2} - \frac{q^2u^2}{r^2} + \left(1 - \frac{g^2}{h^2}\right) u^2 - 2cu + c^2 = 0$.

Il faut donc maintenant faire disparoître le second terme par rapport à u, mais auparavant j'observe que les termes $-\frac{q^2u^2}{r^2} + \left(1 - \frac{g^2}{h^2}\right) u^2$, ou $-\frac{q^2u^2}{r^2} + u^2 - \frac{g^2u^2}{h^2}$, ou $\frac{r^2u^2 - q^2u^2}{r^2} - \frac{g^2u^2}{h^2}$ se réduisent à $\frac{p^2u^2}{r^2} - \frac{g^2u^2}{h^2}$, & les deux termes $\frac{2cq^2u}{r^2} - 2cu$, ou $\frac{2cq^2u - 2cr^2u}{r^2}$ se réduisent à $-\frac{2cp^2u}{r^2}$; de même les deux termes $-\frac{c^2q^2}{r^2} + c^2$, se réduisent à $+\frac{c^2p^2}{r^2}$, parce que $r^2 - q^2 = p^2$. L'équation se change donc en $y^2 + \frac{c^2p^2}{r^2} - \frac{2cp^2u}{r^2} + \frac{p^2u^2}{r^2} - \frac{g^2u^2}{h^2} = 0$, ou chassant les dénominateurs, & faisant ensuite (pour faciliter le calcul) $p^2h^2 - r^2g^2 = r^2kk$, $r^2h^2y^2 + c^2h^2p^2 - 2ch^2p^2u + r^2k^2u^2 = 0$.

Dégageons donc u^2, ce qui donne $u^2 - \frac{2ch^2p^2}{r^2k^2} u + \frac{h^2}{k^2} y^2 + \frac{c^2h^2p^2}{r^2k^2} = 0$; & faisons $u - \frac{ch^2p^2}{r^2k^2} = \frac{ch^2p^2x}{r^2k^2n}$, en introduisant l'inconnue n, parce que le produit ut se trouve dans l'équation primitive (380). Alors en opérant comme ci-dessus, nous aurons, après la substitution faite, $\frac{c^2h^4p^4x^2}{r^4k^4n^2} - \frac{c^2h^4p^4}{r^4k^4} + \frac{h^2}{k^2} y^2 + \frac{c^2h^2p^2}{r^2k^2} = 0$,

ou fupprimant le facteur commun $\frac{h^2}{k^2}$, & laiffant y^2 feul dans un membre, nous aurons $y^2 = -\frac{c^2 h^2 p^4 x^2}{r^4 k^2 n^2} - \frac{c^2 p^2}{r^2} + \frac{c^2 h^2 p^4}{r^4 k^2}$, ou, divifant le fecond membre par le multiplicateur de x^2, & indiquant en même temps la multiplication par le même multiplicateur, $y^2 = -$ ..... $\frac{c^2 h^2 p^4}{r^4 k^2 n^2}\left(x^2 + \frac{r^2 n^2 k^2}{p^2 h^2} - nn\right)$; mais puifqu'il s'agit de l'hyperbole, il faut remarquer que la quantité $r^2 k^2$, qui n'eft autre chofe que $p^2 h^2 - r^2 g^2$, eft négative, puifque, felon la remarque que nous venons de faire ci-deffus, $\frac{4 r^2 h^2 g^2 - 4 p^2 h^4}{r^4}$ ou $\frac{4 h^2}{r^4}(r^2 g^2 - p^2 h^2)$ doit être pofitif pour que la courbe foit une hyperbole. Ainfi il faut rendre k^2 négatif, en obfervant, lorfqu'on voudra mettre fa valeur dans l'équation, de remettre pour cette valeur, la quantité $r^2 g^2 - p^2 h^2$, au lieu de $p^2 h^2 - r^2 g^2$; l'équation devient donc $y^2 = \frac{c^2 h^2 p^4}{r^4 k^2 n^2}\left(x^2 - \frac{r^2 n^2 k^2}{p^2 h^2} - nn\right)$. Comparant cette équation avec $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - \frac{1}{4} aa)$ pour déterminer les diamètres conjugués, on aura $\frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2 h^2 p^4}{r^4 k^2 n^2}$, & $\frac{1}{4} aa = \frac{r^2 n^2 k^2}{p^2 h^2} + nn$, d'où l'on tirera aifément a & b; c'eft-à-dire, les deux diamètres conjugués, que nous allons voir être les deux axes même de l'hyperbole.

Déterminons donc la direction des diamètres conjugués auxquels notre équation réduite fe rapporte. Conformément à ce qui a été fait (382), il faut conftruire les deux équations $t + \frac{cq}{r} - \frac{qu}{r} = y$, & $u - \frac{c h^2 p^2}{r^2 k^2} = \frac{c h^2 p^2 x}{r^2 k^2 n}$; mais comme nous venons d'obferver que k^2 eft négatif dans le cas de l'hyperbole dont il s'agit ici, il faut changer cette

dernière en $u + \frac{ch^2p^2}{r^2k^2} = \frac{ch^2p^2x}{r^2k^2n}$; je ne change point le ſigne du terme affecté de x, quoique k^2 y entre, parce que la quantité n peut être priſe arbitrairement poſitive ou négative. Il faut donc, en continuant d'imiter ce qui a été fait au même endroit cité, mener par le point A parallèlement à PM la ligne $AB = \frac{cq}{r}$, & tirant par le point B la ligne BI parallèle à AZ, prendre arbitrairement ſur le prolongement de cette ligne, la partie BK, & mener KL parallèle à PM, & telle que l'on ait $BK : KL :: r : q$; alors ſi, par le point B & le point L, vous tirez LBQ qui rencontre les lignes PM en Q, les lignes QM ſeront y. Car $QM = PM - PQ = PM - QI + PI = t - QI + \frac{cq}{r}$; or les triangles ſemblables BKL & BQI donnent $BK : KL :: BI$ ou $AP : QI$; c'eſt-à-dire, $r : q :: u : QI = \frac{qu}{r}$; donc $QM = t - \frac{qu}{r} + \frac{cq}{r} = y$.

Mais on peut abréger cette conſtruction en menant tout de ſuite du point F la ligne FB perpendiculaire ſur TA; car il eſt évident que l'angle FAB eſt égal à APM, & que par conſéquent dans le triangle rectangle ABF, on a $r : q :: c : AB = \frac{qc}{r}$; ainſi puiſque QM eſt parallèle à AB, les y ſont perpendiculaires ſur BQ, & par conſéquent BQ eſt la direction d'un des axes, dont l'autre par conſéquent eſt parallèle à QM.

Il ne s'agit donc plus que de déterminer le centre. Or la ſeconde équation $u + \frac{ch^2p^2}{r^2k^2} = \frac{ch^2p^2x}{r^2k^2n}$, fait voir qu'il faut prendre, à l'oppoſite des u, la quantité $AG = \frac{ch^2p^2}{r^2k^2}$,

& tirer GC parallèle à PM ou perpendiculaire à BQ, qui déterminera le point C pour l'origine des x, & par conséquent pour le centre. En effet les x doivent être comptés sur CQ, puisque les y se comptent depuis cette ligne; or l'équation $u + \frac{ch^2p^2}{r^2k^2} = \frac{ch^2p^2x}{r^2k^2n}$, ou $AP + AG = \frac{AG \times x}{n}$, ou $GP = \frac{AG \times x}{n}$, fait voir que ces lignes x commencent en même temps que les lignes GP; donc les lignes x doivent commencer au point C, & sont par conséquent CQ; donc le point C est le centre.

On s'y prendra d'une manière semblable pour l'ellipse.

A l'égard de la parabole, puisqu'on a, dans ce cas, $rg = ph$, ainsi qu'on l'a vu ci-dessus, l'équation que l'on a eue en y & u, après l'évanouissement du second terme par rapport à t, & après avoir introduit pour $r^2 - q^2$ sa valeur p^2, devient, en mettant dans la valeur de k^2, au lieu de g, sa valeur $\frac{ph}{r}$ tirée de $rg = ph$, devient, dis-je, $y^2 + \frac{c^2p^2}{r^2} - \frac{2cp^2u}{r^2} = 0$, ou $y^2 = \frac{2cp^2u}{r^2} - \frac{c^2p^2}{r^2}$; pour la réduire à la forme ordinaire de l'équation à la parabole, on fera donc, conformément à ce qui a été dit (386), $\frac{2cp^2u}{r^2} - \frac{c^2p^2}{r^2} = nx$, ce qui donnera $yy = nx$; & ayant construit de la même manière que dans le cas précédent, l'équation $t + \frac{cq}{r} - \frac{qu}{r} = y$, qu'on a eue pour l'évanouissement du second terme par rapport à t, on construira l'équation $\frac{2cp^2u}{r^2} - \frac{c^2p^2}{r^2} = nx$, d'une manière analogue à ce qui a été fait (386); c'est-à-dire, qu'ayant dégagé u, ce qui donne $u - \frac{1}{2}c = \frac{r^2nx}{2cp^2}$,

dernière en $u + \frac{ch^2p^2}{r^2k^2} = \frac{ch^2p^2x}{r^2k^2n}$; je ne change point le ſigne du terme affecté de x, quoique k^2 y entre, parce que la quantité n peut être priſe arbitrairement poſitive ou négative. Il faut donc, en continuant d'imiter ce qui a été fait au même endroit cité, mener par le point A parallèlement à PM la ligne $AB = \frac{cq}{r}$, & tirant par le point B la ligne BI parallèle à AZ, prendre arbitrairement ſur le prolongement de cette ligne, la partie BK, & mener KL parallèle à PM, & telle que l'on ait $BK : KL :: r : q$; alors ſi, par le point B & le point L, vous tirez LBQ qui rencontre les lignes PM en Q, les lignes QM feront y. Car $QM = PM - PQ = PM - QI + PI = t - QI + \frac{cq}{r}$; or les triangles ſemblables BKL & BQI donnent $BK : KL :: BI$ ou $AP : QI$; c'eſt-à-dire, $r : q :: u : QI = \frac{qu}{r}$; donc $QM = t - \frac{qu}{r} + \frac{cq}{r} = y$.

Mais on peut abréger cette conſtruction en menant tout de ſuite du point F la ligne FB perpendiculaire ſur TA; car il eſt évident que l'angle FAB eſt égal à APM, & que par conſéquent dans le triangle rectangle ABF, on a $r : q :: c : AB = \frac{qc}{r}$; ainſi puiſque QM eſt parallèle à AB, les y ſont perpendiculaires ſur BQ, & par conſéquent BQ eſt la direction d'un des axes, dont l'autre par conſéquent eſt parallèle à QM.

Il ne s'agit donc plus que de déterminer le centre. Or la ſeconde équation $u + \frac{ch^2p^2}{r^2k^2} = \frac{ch^2p^2x}{r^2k^2n}$, fait voir qu'il faut prendre, à l'oppoſite des u, la quantité $AG = \frac{ch^2p^2}{r^2k^2}$,

& tirer GC parallèle à PM ou per[illegible]
déterminera le point C pour l'origine [illegible]
que pour le centre. En effet les [illegible]
sur CQ, puisque les y se comptent [illegible]
l'équation $x + \frac{ch^2p^2}{r^2k^2} =$ [illegible]
$\frac{AG \times z}{z}$, ou $GP = \frac{AG \times z}{z}$ [illegible]
commencent en même temps [illegible]
lignes x doivent commencer [illegible]
quent CQ; donc le point C [illegible]

On s'y prendra d'une [illegible]

A l'égard de la parabole. [illegible]
$rg = ph$, ainsi qu'on [illegible]
a eue en y & u, après [illegible]
par rapport à t, & après [illegible]
valeur p^2, devient, en [illegible]
lieu de g, sa valeur [illegible]
dis-je, $y^2 +$ [illegible]
$- \frac{c^2p^2}{r^2}$; pour la réduire [illegible]
à la parabole, on fera [illegible]
dit (386), $\frac{2cp^2z}{r^2}$ [illegible]
$= nx$; & ayant [illegible]
le cas précédent, l'é[illegible]
a eue pour l'évan[illegible] $\frac{x}{n}$;
à t, on construira [illegible], $y^2 =$
d'une manière analogue [illegible] e, par le
dire, qu'aucune [illegible]



on prendra sur AP (*fig.* 61) la partie $AG = \frac{1}{2}c$, & tirant GC parallèle à PM, le point C sera l'origine des x qui seront CQ; ensorte que CQ sera la direction du diamètre; le sommet de ce diamètre sera en C; & son paramètre sera n, que l'on déterminera ainsi : puisque $AG = \frac{1}{2}c$, on a $GP = AP - AG = u - \frac{1}{2}c = \frac{r^2 nx}{2cp^2} = \frac{r^2 n}{2cp^2} \times CQ$; donc $n = \frac{2cp^2 \times GP}{r^2 \times CQ}$; or les parallèles PQ, CG & AB donnent $CQ : GP :: CF : GF :: BF : AF$; c'est-à-dire, $CQ : GP :: BF : c$; donc $GP = \frac{c \times CQ}{BF}$; mettant pour GP cette valeur dans celle de n, on aura $n = \frac{2c^2p^2}{r^2 \times BF}$ quantité connue, puisque c, p, r sont des quantités données, & que BF est connue par la construction. Mais on peut simplifier cette valeur, en remarquant que le triangle rectangle FAB donne $r : p :: AF : BF :: c : BF$; donc $BF = \frac{cp}{r}$; par conséquent $n = \frac{2(BF)^2}{BF} = 2BF$.

397. Qu'il soit question maintenant de *trouver* (fig. 62) *la courbe que décriroit un point donné* M *de la ligne donnée* OH *ou de son prolongement, si l'on faisoit glisser les extrémités* O *&* H *le long des deux côtés* CO, CH *de l'angle donné* OCH.

D'un point quelconque M de cette courbe menons MP parallèle à CH & MN perpendiculaire à CO; nommons CP, u; PM, t; & puisque l'angle OCH ou son égal OPM est donné, son supplément MPN est donné aussi, nommons donc p le sinus & q le cosinus de ce dernier, en supposant que r marque le rayon; enfin nommons g & h les lignes données OM & MH.

Le triangle rectangle PNM nous donne $r : p :: t : MN$,

& $r : q :: t : PN$; donc $MN = \frac{pt}{r}$, & $PN = \frac{qt}{r}$. Les parallèles CH & PM nous donnent $MH : CP :: MO : PO$; c'est-à-dire, $h : u :: g : PO = \frac{gu}{h}$; donc $NO = \frac{qt}{r} + \frac{gu}{h}$; or le triangle rectangle MNO donne $(MN)^2 + (NO)^2 = (MO)^2$, c'est à-dire, $\frac{p^2t^2}{r^2} + \frac{q^2t^2}{r^2} + \frac{2gqut}{rh} + \frac{g^2u^2}{h^2} = gg$; donc puisque $p^2 + q^2 = r^2$, on aura simplement $t^2 + \frac{2gqut}{rh} + \frac{g^2u^2}{h^2} = gg$, équation à l'ellipse, ainsi qu'on peut le voir d'après ce qui a été dit (381).

Pour ramener cette équation à la forme $yy = \frac{bb}{aa}(\frac{1}{4}aa - xx)$ avec les conditions mentionnées (370), il faut d'abord faire disparoître le second terme par rapport à t. C'est pourquoi je fais $t + \frac{gqu}{rh} = y$; quarrant & substituant pour $t^2 + \frac{2gqut}{rh}$ la valeur que donnera cette opération, on aura $y^2 - \frac{ggqquu}{r^2h^2} + \frac{g^2u^2}{h^2} = gg$; mais les deux termes $- \frac{g^2q^2u^2}{r^2h^2} + \frac{g^2u^2}{h^2}$ ou $\frac{g^2r^2u^2 - g^2q^2u^2}{r^2h^2}$ se réduisent à $\frac{g^2p^2u^2}{r^2h^2}$; parce que $r^2 - q^2 = p^2$, on a donc $y^2 + \frac{g^2p^2u^2}{r^2h^2} = g^2$; or quoique dans cette équation il n'y ait pas de second terme par rapport à u, néanmoins (389) comme le terme ut s'est trouvé dans l'équation primitive, je fais une transformation pour u, en faisant $u = \frac{lx}{n}$; & j'ai $y^2 + \frac{g^2p^2l^2x^2}{r^2h^2n^2} = g^2$, & par conséquent, $y^2 = g^2 - \frac{g^2p^2l^2x^2}{r^2h^2n^2}$ ou (divisant le second membre, par le

multiplicateur de x^2, & indiquant en même temps la multiplication par ce même multiplicateur). . . . . $y^2 = \frac{g^2 p^2 l^2}{r^2 h^2 n^2} \left(\frac{r^2 h^2 n^2}{p^2 l^2} - x^2\right)$. Mais comme nous n'avons besoin que d'une seule indéterminée n, je suis le maître de supposer à l une valeur arbitraire; pour rendre le calcul plus simple, je supposerai $l = r$, ce qui réduira l'équation à $y^2 = \frac{g^2 p^2}{h^2 n^2} \left(\frac{h^2 n^2}{p^2} - x^2\right)$. Pour déterminer l'ellipse, j'en cherche d'abord les diamètres conjugués en comparant à l'équation $yy = \frac{bb}{aa} (\frac{1}{4} aa - xx)$: cette comparaison me donne $\frac{bb}{aa} = \frac{g^2 p^2}{h^2 n^2}$ & $\frac{1}{4} aa = \frac{h^2 n^2}{p^2}$, d'où l'on tire $a = \frac{2hn}{p}$, & $b = 2g$.

Voyons maintenant quelles en sont les directions & quelle est la valeur de n.

Les deux équations à construire sont donc ici, $t + \frac{gqu}{rh} = y$ & $u = \frac{lx}{n} = \frac{rx}{n}$. Pour la première, si l'on prend arbitrairement CK, & que l'on mène ensuite KL parallèle à PM, & telle que $CK : KL :: rh : gq$, alors les lignes QM comptées depuis la rencontre des lignes PM avec la ligne CL, seront y; en effet, les triangles semblables CKL & CPQ donnent $CK : KL :: CP : PQ$, c'est-à-dire, $rh : gq :: u : PQ = \frac{gqu}{rh}$; donc $QM = PM + PQ = t + \frac{gqu}{rh} = y$.

Les lignes QM étant y, il faut maintenant que les x soient comptés sur CQ; or l'équation $u = \frac{rx}{n}$ fait voir que les x commencent en même temps que les u; donc le point C

eft l'origine des x; donc C eft le centre, & CQ & CH font les directions des deux diamètres conjugués. Quant à la valeur de n, l'équation $u = \frac{rx}{n}$, ou $CP = \frac{r \times CQ}{n}$, donne $n = \frac{r \times CQ}{CP}$; mais $CP : CQ :: CK : CL$; donc $\frac{CQ}{CP} = \frac{CL}{CK}$; donc $n = \frac{r \times CL}{CK}$; mais puifque CK eft arbitraire, on peut le fuppofer $= r$, ce qui donne $n = CL$; on a donc tout ce qu'il faut pour conftruire l'ellipfe (316).

Application des mêmes principes à quelques queftions déterminées.

398. Après avoir réfolu la feconde queftion indéterminée que nous nous fommes propofée (394), nous en avons fait ufage (395) pour réfoudre une queftion déterminée. Nous avons tacitement confidéré cette dernière comme en renfermant deux autres, toutes deux indéterminées, & qui étant chacune de même efpèce que la première, ont été réfolues, chacune de la même manière. L'interfection des deux courbes ou cercles qui étoient le *lieu* de chacune de ces deux queftions partielles, a donné la réfolution de la queftion déterminée. Lorfque l'équation finale qui exprime les conditions d'une queftion paffe le fecond degré, on s'y prend d'une manière femblable pour la réfoudre. Dans les cas où l'on pourroit n'employer qu'une inconnue on en emploie deux, & l'on cherche à former par les conditions de la queftion, deux équations qui étant conftruites féparément, donnent chacune une courbe dont chaque point fatisfait à l'équation qui lui appartient : fi le problême eft poffible, les deux courbes fe rencontrent en un ou plufieurs points, felon que la queftion eft fufceptible d'une ou de plufieurs folutions, felon qu'elle renferme plufieurs cas dépendans des mêmes

données & des mêmes raiſonnemens. Ces interſections fourniſſent les différentes ſolutions de la queſtion.

Tant que les deux équations à deux indéterminées, ne paſſeront pas le ſecond degré, on voit donc que la réſolution nè dépendra jamais que de l'interſection de deux ſections coniques tout au plus. Au lieu que dans ces mêmes cas, ſi on n'employoit qu'une ſeule inconnue, ou ſi par le moyen des deux équations trouvées, on éliminoit ou chaſſoit une des deux inconnues, l'équation monteroit au troiſième & plus ſouvent au quatrième degré. Mais ſi l'une des équations ou toutes les deux paſſent le ſecond degré, alors la réſolution dépend de l'interſection de courbes plus élevées que les ſections coniques.

Voyons d'abord quelques exemples des queſtions qui ne paſſeroient pas le quatrième degré.

399. Propoſons-nous pour première queſtion de *trouver deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données* a & b.

Si je nomme t & u ces deux moyennes proportionnelles, j'aurai la progreſſion $\div a : t : u : b$, qui me donne ces deux proportions $a : t :: t : u$ & $t : u :: u : b$, & par conſéquent, ces deux équations $au = t^2$ & $bt = u^2$ qui toutes deux ſe rapportent directement à la parabole. C'eſt pourquoi ſi l'on tire (*fig. 63*) deux lignes indéfinies AZ, AX qui faſſent entre elles un angle quelconque (pour plus de ſimplicité, on peut le ſuppoſer droit), & ſi ſur l'une AZ comme diamètre & du point A comme ſommet de ce diamètre, on conſtruit (367) une parabole dont le paramètre du diamètre AZ ſoit a, & dont l'angle des coordonnées ſoit XAZ, cette parabole ſera le lieu de l'équation $au = t^2$, enſorte que les lignes AP étant u, les

lignes PM feront t. Pareillement fi fur AX comme diamètre & du point A comme fommet, on conftruit une parabole dont le paramètre du diamètre AX foit b, & dont l'angle des coordonnés foit XAZ, cette parabole fera le lieu de l'équation $bt = u^2$, enforte que les lignes AP' étant t, les lignes $P'M'$ feront u. Mais pour que la queftion foit réfolue, il faut que les deux équations $au = t^2$ & $bt = u^2$ aient lieu en même temps; c'eft-à-dire, que la valeur de u dans l'une foit la même que la valeur de u dans l'autre, & qu'il en foit de même de t; or c'eft ce qui arrive évidemment au point M où fe rencontrent les deux paraboles: car les u étant comptés fur AZ, & les t fur AX ou parallèlement à AX, il eft vifible que fi l'on tire MP & MP parallèles à AX & AZ, la valeur MP de u dans la parabole AMM' eft la même que la valeur AP de u dans la parabole AMM; pareillement la valeur AP de t dans la parabole AMM' eft la même que la valeur PM de t dans la parabole AMM; & il eft vifible qu'il n'y a qu'au point M où la valeur de u étant la même dans chacune, la valeur de t foit auffi la même dans chacune, fi ce n'eft cependant au point A où les deux courbes fe rencontrent auffi; mais comme u & t y font zéro, il eft évident que ce point ne fatisfait pas à la queftion. Les valeurs de u & t font donc AP & PM, le point M étant le point de rencontre.

400. Au refte, quoiqu'on puiffe toujours parvenir à la folution en conftruifant féparément les équations que l'on trouve, quelquefois en préparant ces équations, on peut trouver des conftructions plus fimples; par exemple, fi l'on ajoute les deux équations $au = t^2$ & $bt = u^2$, on aura $au + bt = u^2 + t^2$; équation au cercle en fuppofant que les u & les t feront pris fur des lignes perpendiculaires

entre elles. Or quoique la parabole ſoit facile à conſtruire, le cercle l'eſt encore davantage : ainſi dans le cas préſent, je préférerois de conſtruire d'abord l'équation $au = t^2$ ſeulement, comme ci-deſſus ; après quoi je conſtruirois l'équation au cercle $au + bt = u^2 + t^2$; en la changeant en cette autre $yy = \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb - xx$, par l'évanouiſſement des ſeconds termes par rapport à t & à u, en faiſant $t - \frac{1}{2}b = y$, & $u - \frac{1}{2}a = x$. Alors prenant $AB = \frac{1}{2}b$, & tirant BQ parallèle à AP, j'aurois les lignes QM pour les valeurs de y. Prenant enſuite $AO = \frac{1}{2}a$, & menant OC parallèle à AX, j'aurois les lignes CQ pour valeurs de x ; c'eſt pourquoi du point C comme centre, & du rayon $\sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb)}$, c'eſt-à-dire, du rayon AC, je décrirois un cercle qui coupant la parabole AM au point M, me donneroit MP & AP pour les valeurs de t & de u.

401. On peut varier beaucoup ces conſtructions : on peut, par exemple, ajouter l'une des deux équations avec l'autre, multipliée par une quantité arbitraire $\frac{l}{n}$ poſitive ou négative, ce qui donne $au + \frac{l}{n}bt = t^2 + \frac{l}{n}u^2$, équation qui peut appartenir à l'ellipſe ou à l'hyperbole ſelon la quantité qu'on prendra pour $\frac{l}{n}$, enſorte qu'on peut conſtruire avec l'une ou l'autre de ces deux courbes, comme on vient de conſtruire avec le cercle. On peut même conſtruire avec l'une & avec l'autre, ou avec l'une ſeulement combinée avec un cercle, & cela en donnant à $\frac{l}{n}$, des valeurs convenables, & qui ſont faciles à déterminer d'après ce qui a été dit (392).

402. Propoſons-nous pour ſeconde queſtion de *diviſer un angle ou un arc donné, en trois parties égales.*

Soit EO (*fig.* 64) l'arc qu'il s'agit de diviſer ; A ſon centre ;

centre; imaginons que EM eſt le tiers de EO, & ayant tiré les rayons EA, MA, abaiſſons les perpendiculaires MP, OR. Les lignes OR & AR qui ſont le ſinus & le coſinus de l'arc donné OE, ſont cenſées connues; nous les nommerons d & c; & nous nommerons r le rayon AE. Enfin nous nommerons u & t, les inconnues AP & PM.

Cela poſé, le triangle rectangle APM donne $u^2 + t^2 = rr$. Et les triangles ſemblables APM, ARS donnent $AP : PM :: AR : RS$; c'eſt-à-dire, $u : t :: c : RS = \frac{ct}{u}$. Or ſi l'on prolonge la perpendiculaire MP juſqu'à ce qu'elle rencontre la circonférence en V, l'arc MV ſera égal à l'arc MO, comme étant chacun double de ME; donc l'angle $OMS = AMP = ASR$ (à cauſe des parallèles) $= OSM$. Donc le triangle SOM eſt iſoſcèle, & par conſéquent $OS = OM = MV = 2t$; donc puiſque $OR = OS + SR$, on aura $d = 2t + \frac{ct}{u}$, ou $2tu + ct = du$, ou $tu + \frac{1}{2}ct = \frac{1}{2}du$.

Les deux équations à conſtruire ſont donc $u^2 + t^2 = r^2$, ou $t^2 = r^2 - u^2$, & $tu + \frac{1}{2}ct = \frac{1}{2}du$. La première eſt toute conſtruite, puiſque c'eſt l'équation même du cercle EMO.

Quant à la ſeconde, elle appartient à l'hyperbole (391); & comme les deux quarrés manquent, il faut, conformément à ce qui a été dit au même endroit cité, paſſer tous les termes affectés de u, dans un même membre, ce qui donne $tu - \frac{1}{2}du = -\frac{1}{2}ct$, ou $\frac{1}{2}du - tu = \frac{1}{2}ct$; faiſant $\frac{1}{2}d - t = y$, & ſubſtituant pour t, ſa valeur, on a $uy = -\frac{1}{2}cy + \frac{1}{4}cd$, ou $uy + \frac{1}{2}cy = \frac{1}{4}cd$. Je fais enſuite $u + \frac{1}{2}c = x$, & j'ai $xy = \frac{1}{4}cd$, équation à l'hyperbole entre les aſymptotes, que l'on déterminera de la manière ſuivante.

L'équation $\frac{1}{2}d - t = y$, fait voir que si par le point A, origine des u & des t, on mène AB parallèle à PM, & égale à $\frac{1}{2}d$, & que l'on tire QBC parallèle à AP, les lignes QM comptées dans un sens opposé aux PM, seront y; en effet $QM = PQ - PM = AB - PM = \frac{1}{2}d - t = y$; donc CQ est la direction d'une des asymptotes.

La seconde équation $u + \frac{1}{2}c = x$, fait voir que si l'on prolonge AP vers G de la quantité $AG = \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}AR$, les lignes GP ou leurs égales CQ (en tirant GC parallèle à PM) seront x; donc C est le centre, & les lignes CQ & CG sont les asymptotes. On décrira donc par la méthode donnée (354) une hyperbole entre ces asymptotes, laquelle passe par le point A, ainsi que l'indique l'équation $xy = \frac{1}{4}cd = \frac{1}{2}c \times \frac{1}{2}d = AG \times AB = CB \times AB$; cette hyperbole coupera le cercle au point cherché M.

Si l'arc EO étoit de plus de 90°, son cosinus AR tombant alors du côté opposé, seroit négatif; il faudroit dans les équations ci-dessus, supposer c négatif. Et si l'arc EO étoit de plus de 180°, & de moins de 270°, comme l'arc $EOE'O'$, son sinus & son cosinus seroient négatifs; il faudroit donc changer les signes de c & d, dans les mêmes équations ci-dessus.

Si l'on prolonge GC de la quantité $CG' = CG$; & CB de la quantité $CB' = CB$, & qu'ayant mené $B'A'$ & $G'A'$ parallèles à CG' & CB', on décrive entre les lignes CG' & CB' (prolongées indéfiniment) comme asymptotes, une hyperbole qui passe par le point A', cette hyperbole rencontrera le cercle en deux points A', M', comme la première le rencontre aux deux points M & M''. Or de ces quatre points, trois méritent d'être remarqués : savoir,

les points M, M' & M''. Le premier donne l'arc EM pour le tiers de l'arc donné EO. Le second, M', donne l'arc $E'M'$ pour le tiers de $E'O$, supplément de EO. Enfin le troisième, M'', donne $E'M''$ pour le tiers de $EOE'O'$, c'est-à-dire de l'arc OE augmenté de la demi-circonférence.

En effet, l'arc $E'O$ a pour sinus & cosinus, les lignes RO & AR, ainsi que l'arc EO, avec cette seule différence que AR considéré comme cosinus de l'arc $E'O$ plus grand que 90°, est négatif; donc pour avoir la solution dans ce second cas, il n'y a autre chose à faire qu'à supposer, dans la solution ci-dessus, que c est négatif; or ce changement n'affecte que la seconde équation, & change sa réduite $xy = \frac{1}{4}cd$, en $xy = -\frac{1}{4}cd$, équation qui appartient à l'hyperbole $A'M'$, & qui fait donc voir que la solution de ce cas sera fournie par l'intersection M' de cette branche d'hyperbole avec le cercle. (Nous verrons dans un moment, pourquoi ce n'est pas le point A'). $P'M'$ est donc le sinus de l'arc cherché, dans ce second cas. Cet arc est donc $E'M'$; c'est-à-dire, que $E'M'$ est le tiers de $E'O$.

A l'égard de la troisième solution, si l'on augmente l'arc EO de 180°, ce qui se fera en prenant $E'O' = EO$, alors l'arc $EOE'O'$ a pour sinus & cosinus les lignes $R'O'$, AR', qui sont nécessairement égales aux lignes RO & AR, avec cette différence seulement, que tombant toutes deux de côtés opposés à ces dernières, elles sont négatives; donc pour avoir la solution qui convient à ce cas, il n'y a autre chose à faire que de supposer c & d négatifs. Or ce changement n'en produit aucun dans l'équation, où entrent c & d, c'est-à-dire, dans l'équation $xy = \frac{1}{4}cd$; donc la première hyperbole doit donner, par son intersection M'', la solution de ce troisième cas; donc $P''M''$ est le sinus de

l'arc cherché dans ce troisième cas; cet arc est donc $E'M''$; c'est-à-dire, que $E'M''$ est le tiers de $EOE'O'$.

Ainsi la même construction qui sert à trouver le tiers d'un arc donné A, sert aussi à trouver le tiers de $180° - A$, & le tiers de $180° + A$.

On peut appliquer ici ce que nous avons dit (400) sur les différentes sections coniques qu'on peut employer pour construire, en combinant à volonté les deux équations en u & t.

A l'égard de la quatrième intersection, nous avons dit qu'elle se faisoit au point A', ce qui est évident, puisque l'hyperbole est assujettie à passer par le point A', qui est déterminé en faisant $B'A' = AB$, & $B'C = CB$, ce qui fait voir que $AR' = AR$ & $R'A' = RO$; donc le point A' appartient à la circonférence. Mais il ne donne point une nouvelle solution; puisqu'il est connu, & déterminé par des opérations indépendantes des équations qui ont donné la solution.

403. Si de l'équation $2tu + ct = du$, trouvée ci-dessus, on tire la valeur de t, pour la substituer dans l'équation $u^2 + t^2 = r^2$, qu'on a eue en même temps, on aura, après avoir mis pour $c^2 + d^2$, sa valeur r^2, transposé & réduit, $4u^4 + 4cu^3 - 3r^2u^2 - 4cr^2u - r^2c^2 = 0$, ou $4u^3(u+c) - 3r^2u(u+c) - cr^2 \times (u+c) = 0$, qui étant divisé par $u+c$, donne $4u^3 - 3r^2u - cr^2 = 0$, équation qui doit renfermer les trois cas que nous venons d'examiner: elle doit donc avoir trois racines; or la construction fait voir que u a en effet trois valeurs; savoir, AP, AP' & AP''; & ces deux dernières tombant de côtés opposés à la première, on voit que cette équation a trois racines ou valeurs de u, dont deux sont négatives; savoir

$u = -AP'$, $u = -AP''$, & la troisième positive, savoir $u = AP$.

404. L'équation $4u^3 - 3r^2u - cr^2 = 0$, ou $u^3 - \frac{3}{4}r^2u - \frac{1}{4}cr^2 = 0$, est dans le cas irréductible ; & ses racines étant les cosinus de $\frac{1}{3}EO$, $\frac{1}{3}(180° - EO)$, $\frac{1}{3}(180° + EO)$, on peut donc, par le moyen des tables des sinus, trouver les trois racines d'une équation du troisième degré, dans le cas irréductible, par une approximation suffisante & prompte : en voici la méthode. Représentons toute équation du troisième degré dans le cas irréductible, par l'équation $u^3 - pu + q = 0$; en comparant à l'équation $u^3 - \frac{3}{4}r^2u - \frac{1}{4}cr^2 = 0$, nous aurons, $-\frac{3}{4}r^2 = -p$, & $-\frac{cr^2}{4} = q$; de la première de ces deux dernières équations, on tire $r = \sqrt{\frac{4}{3}p}$; & de la seconde, $c = -\frac{3q}{p}$. Représentons par R le rayon des tables ; alors nous aurons le cosinus de l'arc EO, tel qu'il est dans les tables, si nous calculons le quatrième terme de cette proportion $r : c$ ou $\sqrt{\frac{4}{3}p} : \frac{3q}{p} :: R :$ à un quatrième terme ; ce quatrième terme, savoir $\frac{3qR}{p\sqrt{\frac{4}{3}p}}$, étant cherché dans les tables, donnera le sinus du complément de l'arc EO : c'est pourquoi ajoutant 90° au nombre de degrés que l'on trouvera, ou au contraire retranchant ce nombre, de 90°, selon que q sera positif ou négatif dans l'équation, on aura l'arc EO, que je représente par A ; on cherchera donc dans les mêmes tables, les cosinus des trois arcs $\frac{A}{3}$, $\frac{180° - A}{3}$, & $\frac{180° + A}{3}$; & pour les réduire au rayon r, on multipliera chacun par $\frac{r}{R}$, c'est-à-dire, par $\frac{\sqrt{\frac{4}{3}p}}{R}$, puisque pour y réduire par exemple $cos. \frac{A}{3}$ pris dans les tables,

il faut faire cette proportion $R : cos. \frac{A}{3} :: r :$ est au cosinus du même arc dans le cercle qui a pour rayon r, c'est-à-dire, est à AP ou u ; les trois valeurs de u seront donc $u = \frac{\sqrt{\frac{4}{3}p}}{R} cos. \frac{A}{3}$, $u = \frac{\sqrt{\frac{4}{3}p}}{R} cos. \frac{180° - A}{3}$, & $u = \frac{\sqrt{\frac{4}{3}p}}{R} cos. \frac{180° + A}{3}$, dans lesquelles il faudra observer de donner le signe — à celles dont l'arc passera 90°. On peut faciliter ces opérations par le moyen des logarithmes.

405. Proposons-nous maintenant cette question plus générale que celle que nous avons résolue (274). *D'un point* D (fig. 65) *donné de position à l'égard des deux lignes* AR, AP *qui font entre elles un angle connu, mener la ligne* DP *de manière que sa partie interceptée* RP *soit égale à une ligne donnée.*

Du point D menons la ligne DS perpendiculaire à AP prolongée, & la ligne DO parallèle à AR; menons aussi du point R la ligne RN perpendiculaire à AP. Les lignes DO, DS, OS & AO sont censées connues, tant à cause que la position du point D est supposée connue, que parce que l'angle RAP ou son supplément RAN égal à DOS est supposé connu ; c'est pourquoi nous nommerons DO, r; DS, p; OS, q; AO, d, & la ligne à laquelle RP doit être égale, c. Enfin nous nommerons u & t, les inconnues AP & AR.

Cela posé, les triangles semblables DSO, RNA donneront $DO : DS :: AR : RN$, & $DO : OS :: AR : AN$; c'est-à-dire, $r : p :: t : RN = \frac{pt}{r}$, & $r : q :: t : AN = \frac{qt}{r}$; par conséquent, $NP = \frac{qt}{r} + u$;

or le triangle rectangle RNP, donne $\overline{RN}^2 + \overline{NP}^2 = \overline{RP}^2$; c'est-à-dire, $\frac{qqtt}{rr} + \frac{2qut}{r} + uu + \frac{p^2t^2}{rr} = cc$, ou (à cause que $p^2 + q^2 = r^2$, dans le triangle rectangle DSO) $t^2 + \frac{2qut}{r} + u^2 = cc$.

Mais comme nous avons deux inconnues, il nous faut deux équations: or les triangles semblables DOP, RAP donnent $DO : RA :: OP : AP$; c'est-à-dire, $r : t :: d + u : u$, & par conséquent, $ru = td + ut$. Ce sont là les deux équations qu'il faut construire pour résoudre la question. La première (381) appartient à l'ellipse, & la seconde à l'hyperbole.

Pour construire la première, je fais $t + \frac{qu}{r} = y$; en opérant comme dans les exemples semblables ci-dessus, j'aurai, $yy - \frac{qquu}{rr} + uu = cc$, ou $\left[\text{à cause que } -\frac{qquu}{rr} + uu = \left(\frac{rr - qq}{rr}\right) uu = \frac{ppuu}{rr}\right]$ $yy + \frac{ppuu}{rr} = cc$. Je fais $u = \frac{l}{n} x$ (389); & j'ai $yy + \frac{ppllxx}{rrnn} = cc$, ou (parce que je puis supposer arbitrairement une valeur à l'une des deux indéterminées l & n) faisant $l = r$, $yy = cc - \frac{ppxx}{nn} = \frac{pp}{nn}\left(\frac{ccnn}{pp} - xx\right)$. Comparant à l'équation $yy = \frac{bb}{aa}\left(\frac{1}{4}aa - xx\right)$, on trouvera que les deux diamètres conjugués a & b sont $a = \frac{2cn}{p}$, & $b = 2c$. Déterminons leur position & la valeur de n; mais pour mieux sentir l'usage de cette construction, concevons auparavant, que donnant successivement à u ou AP plusieurs valeurs, on mène parallèlement

à AR, les lignes PM égales aux valeurs correſpondantes de t, ce qui produira la courbe dont l'équation nous occupe actuellement. Cela poſé, ayant pris arbitrairement AK ſur AP, & mené KL parallèle à PM, & qui ſoit à AK :: $q : r$, on aura $QM = PM + PQ = t + \frac{qu}{r}$, à cauſe des triangles ſemblables AKL & APQ; donc $QM = y$; AQ eſt donc la direction d'un des diamètres, & les x doivent être comptés ſur ce diamètre; or l'équation $u = \frac{l}{n}$ $x = \frac{r}{n} x$, fait voir que les x commencent en même temps que les u, donc les x ſont AQ. Cela étant, l'équation $u = \frac{rx}{n}$, devient donc $AP = \frac{r \times AQ}{n}$ qui donne $n = \frac{r \times AQ}{AP}$ ou $AP : AQ :: r : n$; c'eſt-à-dire, $AK : AL :: r : n$; or comme AK eſt arbitraire, on peut le ſuppoſer $= r$, & l'on aura, par conſéquent, $n = AL$.

Il ne s'agit donc plus que de conſtruire (316) une ellipſe dont les diamètres conjugués faſſent entre eux un angle égal à AQM, & dont celui qui a AQ pour direction, ſoit $= \frac{2cn}{p}$, & l'autre qui a AR pour direction, ſoit $= 2c$. Cette ellipſe ſera le lieu de la première équation. Mais on peut remarquer en paſſant, que cette ellipſe eſt préciſément celle que décriroit le milieu d'une ligne égale à $2RP$, gliſſant le long des côtés AP, AR; c'eſt ce dont il eſt aiſé de ſe convaincre, en comparant avec la ſolution donnée (397) & y ſuppoſant $g = h = c$. Quand l'angle RAP eſt droit, l'ellipſe devient un cercle dont le rayon eſt c.

Il ne reſte plus qu'à conſtruire la ſeconde équation $ru = dt + ut$ ou $ru - ut = dt$. Or ſelon les principes précédens, je fais $r - t = y'$, & enſuite $u + d = x'$, ce qui

change cette équation en $x'y' = rd$; équation à l'hyperbole entre ses asymptotes. On prendra donc, en vertu de l'équation $r - t = y'$, sur AR la quantité $AT = r = OD$, c'est-à-dire, que par le point D on tirera DTV parallèle à AP; alors les lignes VM seront y' en les comptant de V vers M, c'est-à-dire, dans un sens opposé à PM; car $VM = PV - PM = r - t$, donc $VM = y'$. Ensuite, en vertu de l'équation $u + d = x'$, on prendra $OA = d$, c'est-à-dire, qu'on mènera par le point D la ligne DO parallèle à AT; alors les lignes DV seront x', puisque $DV = OP = OA + AP = d + u$. On construira donc (354) entre les lignes DO & DV comme asymptotes, une hyperbole qui passe par le point A, puisqu'on a $x'y' = rd = AO \times AT$; cette hyperbole rencontrera l'ellipse aux deux points M & M', par lesquels menant MR & $M'R'$ parallèles à AP, on aura deux points R & R' par lesquels & par le point D tirant DRP & $DP'R'$, les parties PR & $P'R'$ interceptées dans les angles égaux RAP, $R'AP'$ seront égales à la ligne c.

Si en prolongeant les asymptotes, on décrit l'hyperbole opposée (*fig. 66*) $M''A'M'''$, dans le cas où elle rencontrera l'ellipse, elle déterminera deux nouveaux points M'' M''' par lesquels menant des parallèles à AP, on aura sur AT deux nouveaux points R'', R''', par lesquels & par le point D tirant deux lignes, les parties comprises dans l'angle TAS seront aussi égales à la ligne donnée c. Telle est en général la manière dont on doit s'y prendre pour résoudre les questions déterminées, qui n'excéderont pas le quatrième degré.

406. Si l'on avoit résolu la question sans employer deux inconnues, on pourroit néanmoins faire usage de la même

méthode, en introduisant une nouvelle inconnue. Par exemple, si l'on proposoit de *trouver un cube qui soit à un cube connu* a^3, *dans un rapport donné, marqué par le rapport de* m *à* n. En nommant u le côté de ce cube, on auroit $u^3 : a^3 :: m : n$, & par conséquent $nu^3 = ma^3$.

Pour construire cette équation, je supposerois $u^2 = at$; alors l'équation se changeroit en $natu = ma^3$, ou $tu = \frac{ma^2}{n}$. Je construirois donc la parabole qui a pour équation $u^2 = at$, & l'hyperbole qui a pour équation $tu = \frac{ma^2}{n}$. L'intersection de ces deux courbes, me donneroit les valeurs de u & t.

Si l'on multiplie par u, l'équation $tu = \frac{ma^2}{n}$, & qu'on y substitue de nouveau, pour u^2 sa valeur at, on aura $at^2 = \frac{ma^2u}{n}$, ou $t^2 = \frac{ma}{n}u$, autre équation à la parabole, que l'on peut construire conjointement avec l'équation $u^2 = at$. On peut remarquer, en passant, que ces équations sont les mêmes qu'on auroit en cherchant deux moyennes proportionnelles entre a & $\frac{ma}{n}$; ainsi on peut construire précisément de la même manière qu'on l'a fait (399).

407. L'équation $nu^3 = ma^3$, donne $u = \sqrt[3]{\frac{ma^3}{n}}$; on voit donc que la construction des radicaux cubes se fait par le moyen des sections coniques. Il en est de même des radicaux quatrièmes, lorsqu'ils renferment des radicaux cubes comme $\sqrt[4]{(a^3\sqrt[3]{ab^2})}$; car s'ils ne renfermoient que des radicaux quarrés comme $\sqrt[4]{(a^3\sqrt{ab})}$, ou des quantités

rationnelles, leur construction se ramèneroit toujours au cercle; en effet, en prenant une moyenne proportionnelle m entre a & b, on auroit $\sqrt[4]{a^3 m}$; prenant une moyenne proportionnelle n entre a & m, on auroit $\sqrt[4]{a^2 n^2}$ ou $\sqrt{an}$, qui exprime une moyenne proportionnelle entre a & n.

408. Quand l'équation déterminée auroit un plus grand nombre de termes, on la construiroit toujours d'une manière analogue; par exemple, si l'on avoit $u^4 + au^3 + aqu^2 + a^2ru + sa^3 = 0$, a, q, r, s étant des quantités connues; en supposant $u^2 = at$, on auroit $a^2t^2 + a^2ut + aqu^2 + a^2ru + sa^3 = 0$, ou $at^2 + aut + qu^2 + aru + sa^2 = 0$, équation qui appartient à une section conique; construisant donc cette équation, & l'équation $u^2 = at$, selon les principes donnés ci-devant, les intersections des deux courbes donneront les différentes valeurs de u.

409. Mais en introduisant ainsi, arbitrairement, une nouvelle équation, il peut arriver, que les deux courbes ne se rencontrent point, quoique la question qui aura donné l'équation, ait une ou plusieurs solutions; c'est pourquoi, pour éviter tout embarras, nous allons exposer un procédé qui a lieu également pour tous les degrés.

Supposons, par exemple, que l'équation soit $u^3 - qu^2 + pau - qa^2 = 0$; on supposera $u^3 - qu^2 + pau - qa^2 = a^2t$, t marquant une indéterminée, & a, p, q, des nombres ou des lignes connues; alors si l'on conçoit qu'on donne à u successivement plusieurs valeurs AP, AP, &c. (*fig.* 67), & que l'on porte (*) les valeurs correspondantes de t (qui seront faciles à avoir, puisque t ne monte qu'au

(*) En observant de porter de côtés opposés de l'axe AP, celles qui se trouveront avoir des signes contraires.

premier degré) en PM, PM, ſous un angle quelconque, que pour plus de ſimplicité on peut ſuppoſer droit, il en naîtra une courbe. Or pour ſavoir où cette courbe rencontre l'axe AP, il faut ſuppoſer $t = 0$, ce qui donne $u^3 - au^2 + pau - q = 0$, c'eſt-à-dire, l'équation propoſée; donc les diſtances AO, AO', AO'' auxquelles la courbe rencontre l'axe, ſeront les différentes valeurs de u.

Mais ſi au lieu de calcul, on veut une conſtruction, cela ſera fort aiſé en donnant à l'équation, cette forme, $t = \frac{u^3}{a^2} - \frac{u^2}{a} + \frac{pu}{a} - q$; or la conſtruction de chacun des termes $\frac{u^3}{a^2}$, $\frac{u^2}{a}$, $\frac{pu}{a}$, pour chaque valeur de u donnée en lignes, eſt facile & s'exécute par ce qui a été dit (246).

410. Quand il entrera plus d'une inconnue dans la queſtion, on pourra ramener la conſtruction à celle que nous venons de donner, en réduiſant toutes les inconnues à une ſeule, par la méthode donnée (162 *& ſuiv.*)

411. Si la queſtion eſt indéterminée, & que l'une des deux indéterminées qui entreront dans l'équation, ne paſſe pas le ſecond degré, on pourra toujours conſtruire l'équation, à quelque degré que monte l'autre indéterminée, en donnant à cette autre indéterminée des valeurs arbitraires, & calculant les valeurs correſpondantes de la première; faiſant de celles-là les abſciſſes, & de celles-ci les ordonnées d'une courbe. Mais ſi les deux indéterminées paſſent toutes deux le ſecond degré, alors il faudra pour chaque valeur que l'on donnera à une des indéterminées, trouver les valeurs de l'autre, par la méthode qu'on vient de donner. Nous n'entrerons pas dans un plus grand détail ſur les

conſtructions de cette dernière eſpèce qu'on rencontre d'ailleurs aſſez rarement.

412. Avant de terminer cette troiſième Partie, nous ferons encore remarquer quelques uſages de l'application des équations aux courbes. Puiſque toute équation à une ſection conique eſt toujours du ſecond degré, & que l'équation la plus générale de ce degré peut toujours être réduite à cette forme $dt^2 + cut + eu^2 + ft + gu + h = 0$, il s'enſuit qu'on peut toujours faire paſſer une ſection conique par cinq points donnés, pourvu que ces points, pris trois à trois, ne ſoient pas en ligne droite, parce qu'une ſection conique ne peut rencontrer une ligne droite en plus de deux points.

En effet, concevons que A, B, C, D, E (*fig. 68*) ſoient cinq points donnés & qui aient cette condition : ſi l'on rapporte ces cinq points à la ligne AD qui joint deux d'entre eux, en menant les lignes BF, CH, EG ſous un angle donné, ou perpendiculaires à AD, alors les diſtances AF, BF, AG, GE, AH, HC, AD, qui ſont cenſées connues, peuvent être regardées comme les abſciſſes & les ordonnées d'une ligne courbe. Or je dis qu'on peut toujours ſuppoſer que cette ligne courbe a pour équation $dt^2 + cut + eu^2 + ft + gu + h = 0$; en effet, ſi l'on nomme AF, m; BF, n; AG, m'; GE, n'; AH, m''; CH, n'', & AD, m'''; il eſt viſible que 1°. pour le point A on aura $u = 0$, & $t = 0$, ce qui réduit l'équation à $h = 0$. 2°. Pour le point B on aura $u = m$ & $t = n$; ce qui change l'équation en $dm^2 + cmn + en^2 + fm + gn = 0$, (à cauſe que $h = 0$). 3°. Pour le point E, on aura $u = m'$, $t = n'$, & par conſéquent, $dm'^2 + cm'n' + en'^2 + fm' + gn' = 0$. 4°. Pour le point C, on trouvera de même $dm''^2 + cm''n'' + en''^2 + fm'' + gn'' = 0$. 5°. Enfin pour le point D ou $t = 0$ & $u = m'''$,

on aura $em'''^2 + fm''' = 0$, ou ſimplement $em''' + f = 0$. Or ces quatre équations renfermant toutes les quantités c, e, f, g, au premier degré, il ſera facile, par les méthodes de la première ſection, d'en avoir les valeurs; alors en les ſubſtituant dans l'équation $dt^2 + cut + eu^2 + ft + gu + h = 0$, ou plutôt dans l'équation $dt^2 + cut + eu^2 + ft + gu = 0$, (puiſque $h = 0$), on aura c, e, f, g en quantités toutes connues, & l'équation ſe diviſera par d. Il ſera donc alors facile de conſtruire la courbe, & de déterminer ſi elle eſt ellipſe, hyperbole, parabole, ou cercle. Si l'on ne donnoit que quatre points, alors un des coëfficiens ſeroit arbitraire; ce qui donne lieu d'impoſer arbitrairement une condition, & deux ſi l'on ne donne que trois points, & ainſi de ſuite.

On diſtingue les lignes par le degré de leur équation. Ainſi la ligne droite, dont l'équation n'eſt que du premier degré, eſt ligne du prèmier ordre. Les ſections coniques ſont les lignes du ſecond ordre.

On voit donc qu'on peut, par la même méthode, déterminer l'équation d'une ligne du troiſième ordre, qu'on aſſujettiroit à paſſer par autant de points moins un que l'équation générale de cet ordre, à deux indéterminées, peut avoir de termes différens : il en eſt de même dans les ordres ſupérieurs.

413. Cette même méthode peut ſervir à lier par une loi approchée & ſimple, pluſieurs quantités connues, dont la loi ſeroit ou trop compoſée ou inconnue. Suppoſons, par exemple, que l'on connoiſſe trois quantités que je repréſente par les lignes CB, ED, GF (*fig. 69*) & que ces quantités dépendent de trois autres AB, AD, AF. Il s'agit de trouver une quantité HL intermédiaire aux premières,

ou qui en soit voisine, & qui dérive de AH de la même manière que CB, ED, &c. dérivent de AB, AD, &c.

On peut satisfaire à cette question d'une infinité de manières différentes, en prenant une équation à deux indéterminées u & t qui ait au moins autant de termes différens qu'il y a de quantités telles que CB, ED, GF. Mais entre tous ces différens moyens celui qui donne plus de facilité, pour les différens usages qu'on peut faire de cette méthode, est de regarder la ligne IH comme l'ordonnée, & la ligne AH comme l'abscisse d'une courbe qui passeroit par les points donnés C, E, G, &c., & qui auroit pour équation celle-ci, $t = a + bu + cu^2 +$ &c. en prenant autant de termes que l'on a de quantités ou de points C, E, G; alors supposant, comme ci-dessus, que u valant AB, t vaut CB; que u valant AD, t vaut DE; que u valant AF, t vaut GF, & ainsi de suite, on aura autant d'équations pour déterminer a, b, c, &c. qu'on a de points. Ayant déterminé les valeurs de a, b, c, &c., si on les substitue dans l'équation $t = a + bu + cu^2$, &c. on aura une équation dans laquelle tout sera connu, excepté u & t. Si donc on met pour u, la distance connue AH qui convient à la quantité HI que l'on cherche, alors on aura la valeur correspondante de t, c'est-à-dire, HI.

On voit par-là la confirmation de ce que nous avons dit (282). En effet, si l'on vouloit imiter le contour $ABCDEF$ (*fig.* 70); on abaisseroit d'un certain nombre de points de ce contour, des perpendiculaires sur une ligne déterminée XZ; puis par la méthode qu'on vient de voir, on détermineroit l'équation d'une courbe qui passeroit par tous ces points, & dans laquelle t étant au premier degré, u montât à un degré marqué par le nombre de ces points

moins un ; alors cette équation serviroit à déterminer des perpendiculaires intermédiaires qui approcheroient d'autant plus des véritables, qu'on aura pris d'abord un plus grand nombre de points A, B, C, D, &c.

Appendice.

414. Nous nous étions proposé de faire entrer dans ce volume plusieurs autres objets; mais pour ne point passer de justes bornes, nous sommes obligés de les renvoyer au suivant. Cependant, nous placerons encore ici quelques propositions dont nous aurons occasion de faire usage par la suite, & dont quelques-unes nous serviront à démontrer la règle que nous avons donnée (*Géom.* 361. *Quest.* VI) pour trouver les angles d'un triangle sphérique lorsqu'on en connoît les trois côtés.

415. Rappelons-nous (*Géom.* 284, 285 & 278) que si a & b représentent deux angles ou deux arcs, on a $\sin.(a+b) = \frac{\sin. a \cos. b + \sin. b \cos. a}{r}$, & $\cos.(a+b) = \frac{\cos. a \cos. b - \sin. a \sin. b}{r}$, ou (en supposant pour plus de simplicité que $r = 1$)

1°. $\sin.(a+b) = \sin. a \cos. b + \sin. b \cos. a.$

2°. $\cos.(a+b) = \cos. a \cos. b - \sin. a \sin. b.$

3°. $\sin.(a-b) = \sin. a \cos. b - \sin. b \cos. a.$

4°. $\cos.(a-b) = \cos. a \cos. b + \sin. a \sin. b.$

5°. tang.

5°. $\text{tang.}\ a = \frac{r\ \text{ſin.}\ a}{\text{coſ.}\ a} = \frac{\text{ſin.}\ a}{\text{coſ.}\ a}$ en ſuppoſant toujours le rayon $= 1$, comme nous le ferons dorénavant.

6°. $\text{cot.}\ a = \frac{\text{coſ.}\ a}{\text{ſin.}\ a}$.

416. Cela poſé, ſi l'on diviſe la valeur de ſin. $(a + b)$ par celle de coſ. $(a + b)$, on aura $\frac{\text{ſin.}\ (a+b)}{\text{coſ.}\ (a+b)}$, c'eſt-à-dire, tang. $(a + b)$ $= \frac{\text{ſin.}\ a\ \text{coſ.}\ b + \text{ſin.}\ b\ \text{coſ}\ a}{\text{coſ.}\ a\ \text{coſ.}\ b - \text{ſin.}\ a\ \text{ſin.}\ b} = \frac{\frac{\text{ſin.}\ a}{\text{coſ.}\ a} + \frac{\text{ſin.}\ b}{\text{coſ.}\ b}}{1 - \frac{\text{ſin.}\ a\ \text{ſin.}\ b}{\text{coſ.}\ a\ \text{coſ.}\ b}}$ (en diviſant le ſecond membre, haut & bas, par coſ. a coſ. b); donc tang. $(a+b) = \frac{\text{tang.}\ a + \text{tang.}\ b}{1 - \text{tang.}\ a\ \text{tang.}\ b}$.

Si au contraire on diviſe la valeur de coſ. $(a+b)$ par celle de ſin. $(a + b)$, on aura $\frac{\text{coſ.}\ (a+b)}{\text{ſin.}\ (a+b)}$ ou cot. $(a + b) = \frac{\text{coſ.}\ a\ \text{coſ.}\ b - \text{ſin.}\ a\ \text{ſin.}\ b}{\text{ſin}\ a\ \text{coſ.}\ b + \text{ſin.}\ b\ \text{coſ.}\ a}$, ou en diviſant haut & bas par ſin. a coſ. b . . . .

$$\text{cot.}\ (a + b = \frac{\frac{\text{coſ.}\ a}{\text{ſin.}\ a} - \frac{\text{ſin.}\ b}{\text{coſ.}\ b}}{1 + \frac{\text{ſin.}\ b\ \text{coſ.}\ a}{\text{ſin.}\ a\ \text{coſ.}\ b}} = \frac{\text{cot.}\ a - \text{tang.}\ b}{1 + \text{cot.}\ a\ \text{tang.}\ b}.$$

Si l'on diviſe de même la valeur de ſin. $(a - b)$ par celle de coſ. $(a - b)$, & celle de coſ. $(a - b)$ par celle de ſin. $(a - b)$, on aura, en opérant de même, tang. $(a - b) = \frac{\text{tang.}\ a - \text{tang.}\ b}{1 + \text{tang.}\ a\ \text{tang.}\ b}$, & cot. $(a - b)$ $= \frac{\text{cot.}\ a + \text{tang.}\ b}{1 - \text{cot.}\ a\ \text{tang.}\ b}$.

417. Les valeurs de ſin. $(a+b)$ coſ. $(a+b)$, tang. $(a+b)$ que nous venons d'expoſer, peuvent ſervir à trouver facilement les ſinus, coſinus & tangentes des arcs multiples d'un arc donné, & par conſéquent les équations qui ſerviroient à diviſer un angle en pluſieurs parties égales. Il n'y a qu'à ſuppoſer ſucceſſivement $b=a$, $=2a$, $=3a$; & ainſi de ſuite.

Par exemple, en ſuppoſant $b=a$, on aura ſin. $2a = 2$ ſin. a coſ. a, & coſ. $2a =$ coſ. a coſ. $a -$ ſin. a ſin. $a =$ coſ.$^2 a -$ ſin.$^2 a = 1 - 2$ ſin.$^2 a$, (en mettant pour coſ.$^2 a$ ſa valeur $1 -$ ſin.$^2 a$). En ſuppoſant $b = 2a$, on aura ſin. $3a =$ ſin. a coſ. $2a +$ ſin. $2a$ coſ. a, & coſ. $3a =$ coſ. $2a$ coſ. a $-$ ſin. $2a$ ſin. a. Or les deux équations précédentes donnent les valeurs de ſin. $2a$ & de coſ. $2a$; ſi donc on les ſubſtitue dans celles-ci, on aura les valeurs de ſin. $3a$ & coſ. $3a$ exprimées par les ſinus & coſinus de l'arc ſimple a. On trouvera de même celles de ſin. $4a$ & coſ. $4a$; ſin. $5a$ & coſ. $5a$, & ainſi de ſuite. On s'y prendra de même pour avoir tang. $2a$, tang. $3a$, &c., en employant la formule qui donne tang. $(a+b)$, & ſuppoſant ſucceſſivement $b=a$, $=2a=$ &c.

418. Si l'on ajoute enſemble la valeur de ſin. $(a+b)$ & celle de ſin. $(a-b)$, on aura ſin. $(a+b)+$ ſin.

$(a - b) = 2$ ſin. a coſ. b, & par conſéquent ſin. a coſ. $b = \frac{1}{2}$ ſin. $(a + b) + \frac{1}{2}$ ſin. $(a - b)$. En ajoutant pareillement la valeur de coſ. $(a + b)$ avec celle de coſ. $(a - b)$, on trouvera 2 coſ. a coſ. $b =$ coſ. $(a + b) +$ coſ. $(a - b)$, ou coſ. a coſ. $b = \frac{1}{2}$ coſ. $(a + b) + \frac{1}{2}$ coſ. $(a - b)$. Au contraire en retranchant la valeur de coſ. $(a + b)$ de celle de coſ. $(a - b)$ on trouvera 2 ſin. a ſin. b = coſ. $(a - b)$ — coſ. $(a + b)$, & par conſéquent ſin. a ſin. $b = \frac{1}{2}$ coſ. $(a - b) - \frac{1}{2}$ coſ. $(a + b)$.

419. Si l'on fait $a + b = m$ & $a - b = n$, on aura, en ajoutant & retranchant, & diviſant enſuite par 2, $a = \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}n$, & $b = \frac{1}{2}m - \frac{1}{2}n$, d'où l'on conclura facilement des dernières formules qu'on vient de trouver :

1°. ſin. m + ſin. $n = 2$ ſin. $(\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}n) \times$ coſ. $(\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}n)$.
2°. coſ. m + coſ. $n = 2$ coſ. $(\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}n) \times$ (coſ. $\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}n$).
3°. coſ. n — coſ. $m = 2$ ſin. $(\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}n) \times$ (ſin. $\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}n$).

Toutes ces propoſitions nous ſeront très-utiles ; on voit avec quelle facilité elles ſe trouvent & ſe démontrent par le calcul. Nous nous bornerons, pour le préſent, à en faire voir l'uſage pour la démonſtration de la règle donnée (*Géom.* 361. *Queſt.* VI.).

420. Soit donc ABC (*fig.* 71) un triangle ſphérique, AD un arc de grand cercle, abaiſſé de

l'angle A perpendiculairement sur le côté opposé BC : prenons sur ce même côté $BE = BA$, & ayant imaginé l'arc de grand cercle AE, par son milieu O & par le point B, imaginons aussi l'arc de grand cercle BO, qui divisera l'angle ABC en deux parties égales.

Cela posé, dans le triangle EBO, on aura (*Géométrie* 349) en supposant le rayon $= 1$, $1 : \text{sin.}\, BE$ ou $\text{sin.}\, AB :: \text{sin.}\, OBE$ ou $\text{sin.}\, \frac{1}{2} ABC : \text{sin.}\, OE$; donc $\text{sin.}\, OE$ ou $\text{sin.}\, \frac{1}{2} AE = \text{sin.}\, AB \times \text{sin}\, \frac{1}{2} ABC$; ou, en quarrant, $\text{sin.}^2\, \frac{1}{2} AE = \text{sin.}^2\, AB \times \text{sin.}^2\, \frac{1}{2} ABC$; or nous venons de voir (417) que $\text{cos.}\, 2a = 1 - 2\, \text{sin.}^2\, a$, ou, en faisant $2a = m$, $\text{cos.}\, m = 1 - 2\, \text{sin.}^2\, \frac{1}{2} m$; donc $\text{sin.}^2\, \frac{1}{2} m = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{cos.}\, m$, & par conséquent on peut, au lieu de $\text{sin.}^2\, \frac{1}{2} AE$, mettre $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{cos.}\, AE$; on aura donc $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{cos.}\, AE = \text{sin.}^2\, AB \times \text{sin.}^2\, \frac{1}{2} ABC$; or (*Géométrie* 357) on a, dans le triangle ABC, $\text{cos.}\, BD : \text{cos.}\, CD$ ou $\text{cos.}\, (BC - BD) :: \text{cos.}\, AB : \text{cos.}\, AC$; c'est-à-dire, $\text{cos.}\, BD : \text{cos.}\, BC\, \text{cos.}\, BD + \text{sin.}\, BC\, \text{sin.}\, BD :: \text{cos.}\, AB : \text{cos.}\, AC$, & par conséquent $\text{cos.}\, BD\, \text{cos.}\, AC = \text{cos.}\, AB\, \text{cos.}\, BC\, \text{cos.}\, BD + \text{cos.}\, AB\, \text{sin.}\, BC\, \text{sin.}\, BD$, d'où l'on tire $\text{sin.}\, BD = \frac{\text{cos.}\, BD\, \text{cos.}\, AC - \text{cos.}\, AB\, \text{cos.}\, BC\, \text{cos.}\, BD}{\text{cos.}\, AB\, \text{sin.}\, BC}$. Par le même principe, on aura dans le triangle

BAE, cof. BD : cof. DE ou cof. $(AB - BD)$ :: cof. AB : cof. AE; c'eft-à-dire, cof. BD : cof. AB cof. BD + fin. AB fin. BD :: cof. AB : cof. AE; donc cof. BD cof. AE = cof. AB cof. AB cof. BD + cof. AB fin. AB fin. BD, d'où l'on tire fin. $BD = \frac{\text{cof. } BD \text{ cof. } AE - \text{cof.}^2 AB \text{ cof. } BD}{\text{cof. } AB \text{ fin. } AB}$; égalant ces deux valeurs de fin. BD, & fupprimant enfuite le facteur commun $\frac{\text{cof. } BD}{\text{cof. } AB}$ on aura, après les opérations ordinaires, cof. AE = $\frac{\text{fin. } AB \text{ cof. } AC - \text{cof. } AB \text{ fin. } AB \text{ cof. } BC + \text{cof.}^2 AB \text{ fin. } BC}{\text{fin. } BC}$; fubftituant cette valeur dans l'équation $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ cof. AE = fin.^{2} AB fin.^{2} $\frac{1}{2} ABC$, on aura $\frac{1}{2} - \frac{\text{fin. } AB \text{ cof. } AC + \text{cof. } AB \text{ fin. } AB \text{ cof. } BC - \text{cof.}^2 AB \text{ fin. } BC}{2 \text{ fin. } BC}$ = fin.^{2} AB fin.^{2} $\frac{1}{2} ABC$; chaffant les dénominateurs, & mettant enfuite dans fin. BC — cof.^{2} AB fin. BC ou fin. BC $(1 - \text{cof.}^2 AB)$, au lieu de $1 - \text{cof.}^2 AB$, fa valeur fin.^{2} AB, & divifant enfuite par fin. AB, on aura fin. BC fin. AB — cof. AC + cof. AB cof. BC = 2 fin. AB × fin. BC fin.^{2} $\frac{1}{2} ABC$; or (415) cof. AB cof. BC + fin. BC fin. AB = cof. $(BC - AB)$; donc cof. $(BC - AB)$ — cof. AC = 2 fin. AB fin. BC fin.^{2} $\frac{1}{2} ABC$; mais (419) cof. $(BC - AB)$ — cof. AC = 2 fin. $(\frac{1}{2} AC + \frac{1}{2} CB - \frac{1}{2} AB)$ fin. $(\frac{1}{2} AC - \frac{1}{2} BC + \frac{1}{2} AB)$ qui eft la même chofe que

2 fin. $(\frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}AB - AB)$ fin. $(\frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}AB - BC)$ ou (en nommant S la fomme des trois côtés), la même chofe que 2 fin. $(\frac{1}{2}S - AB) \times$ fin. $(\frac{1}{2}S - BC)$; donc 2 fin. $(\frac{1}{2}S - AB) \times$ fin. $(\frac{1}{2}S - BC) =$ 2 fin. AB fin. BC fin.$^2 \frac{1}{2} ABC$, d'où, après avoir divifé par 2, on tire fin. $AB \times$ fin. BC : fin. $(\frac{1}{2}S - AB)$ $\times$ fin. $(\frac{1}{2}S - BC)$ :: 1 ou r^2 : fin.$^2 \frac{1}{2} ABC$; ce qui donne, en employant les logarithmes, la règle qu'il s'agiffoit de démontrer.



EXTRAIT DES REGISTRES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES,

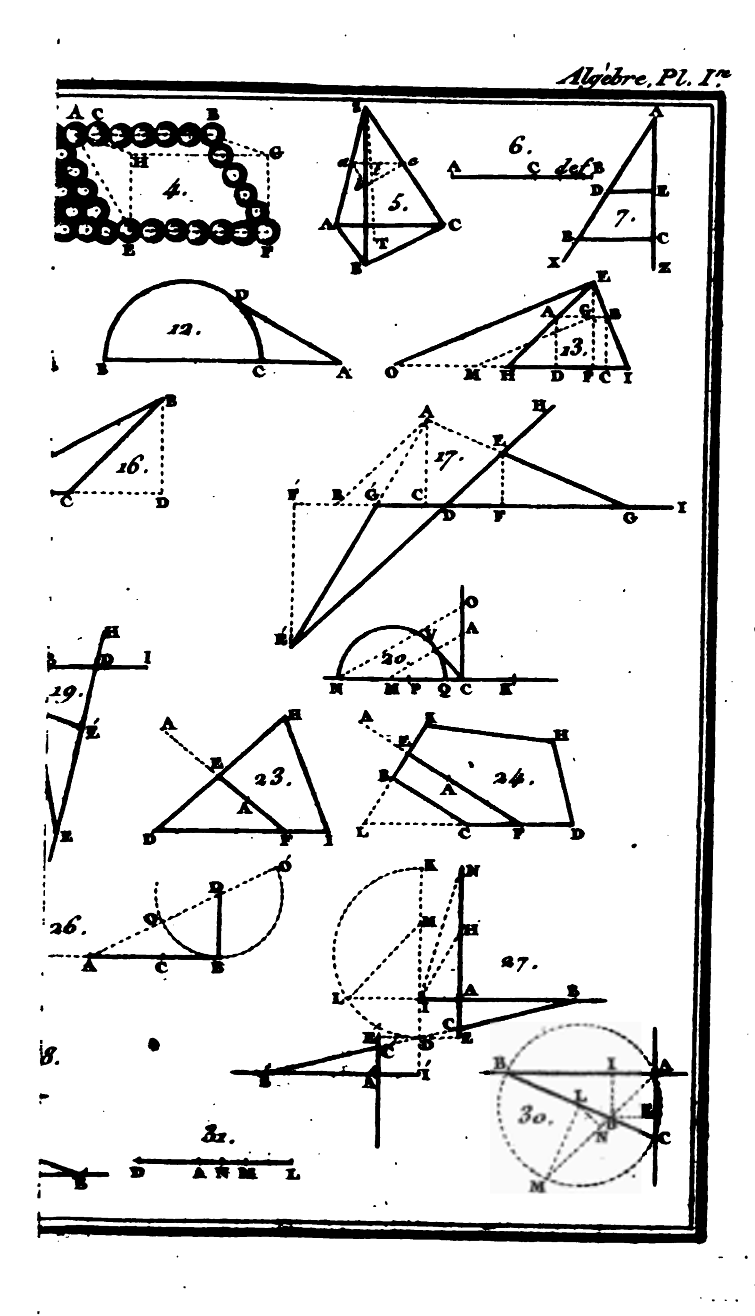
Du 11 Décembre 1765.

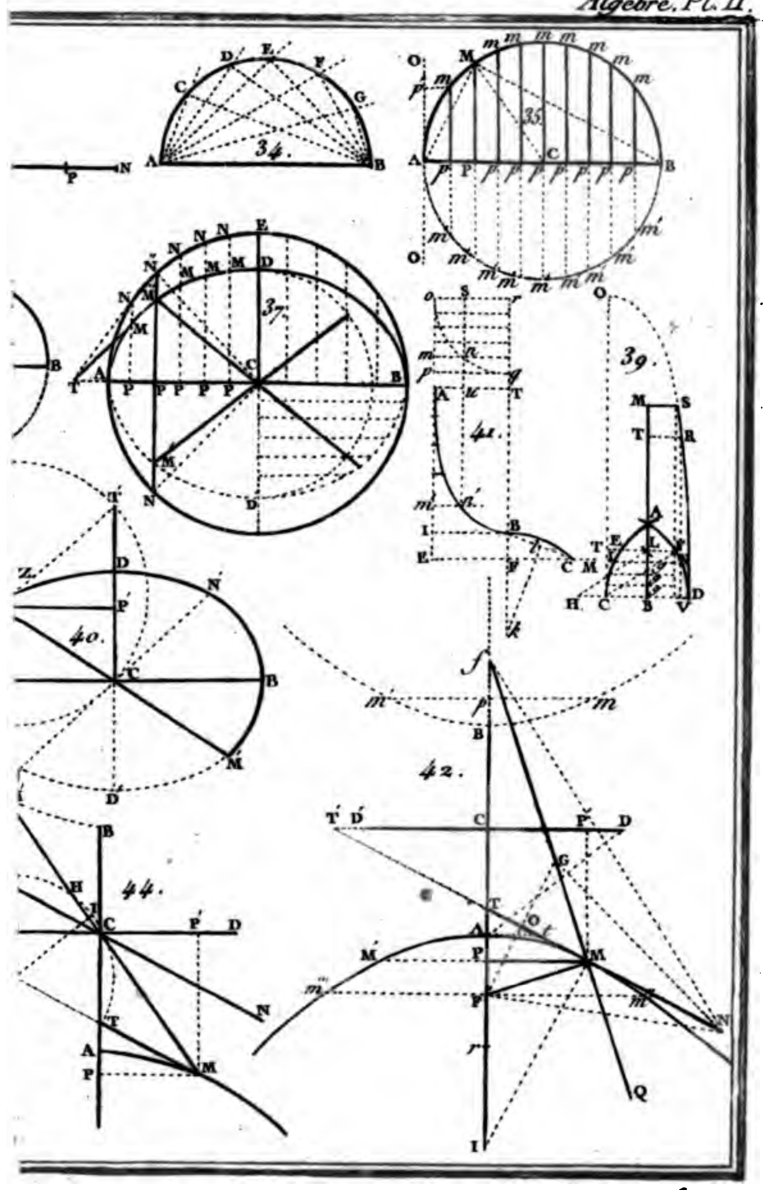
M.rs DUHAMEL & D'ALEMBERT, qui avoient été nommés pour examiner *la troisième Partie* du *Cours de Mathématiques à l'usage des Gardes du Pavillon & de la Marine*, par M. BÉZOUT, en ayant fait leur rapport, l'Académie a jugé cet Ouvrage digne de l'impression; en foi de quoi j'ai signé le présent Certificat. A Paris, ce 11 Décembre 1765.

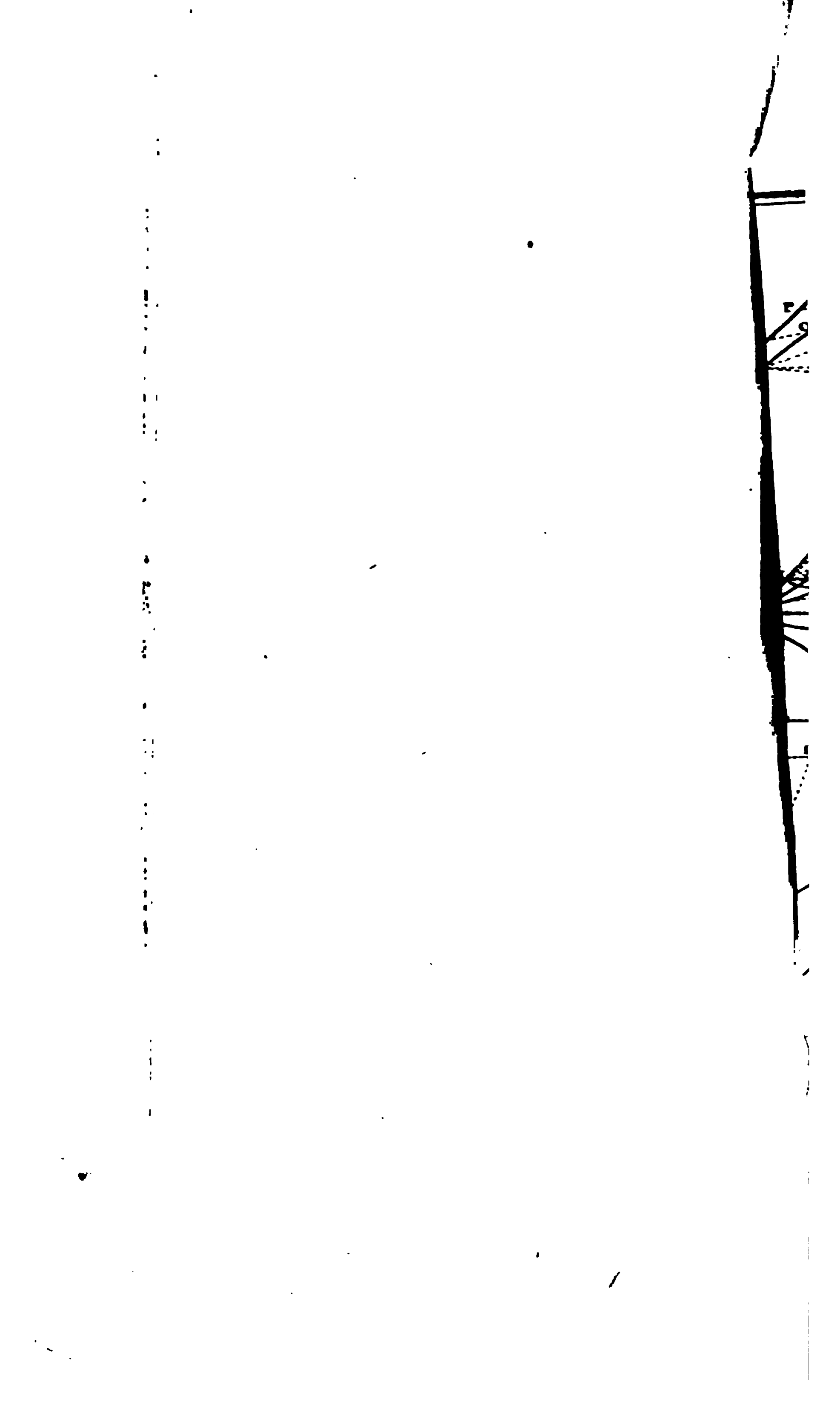
Signé *GRANDJEAN DE FOUCHY*,

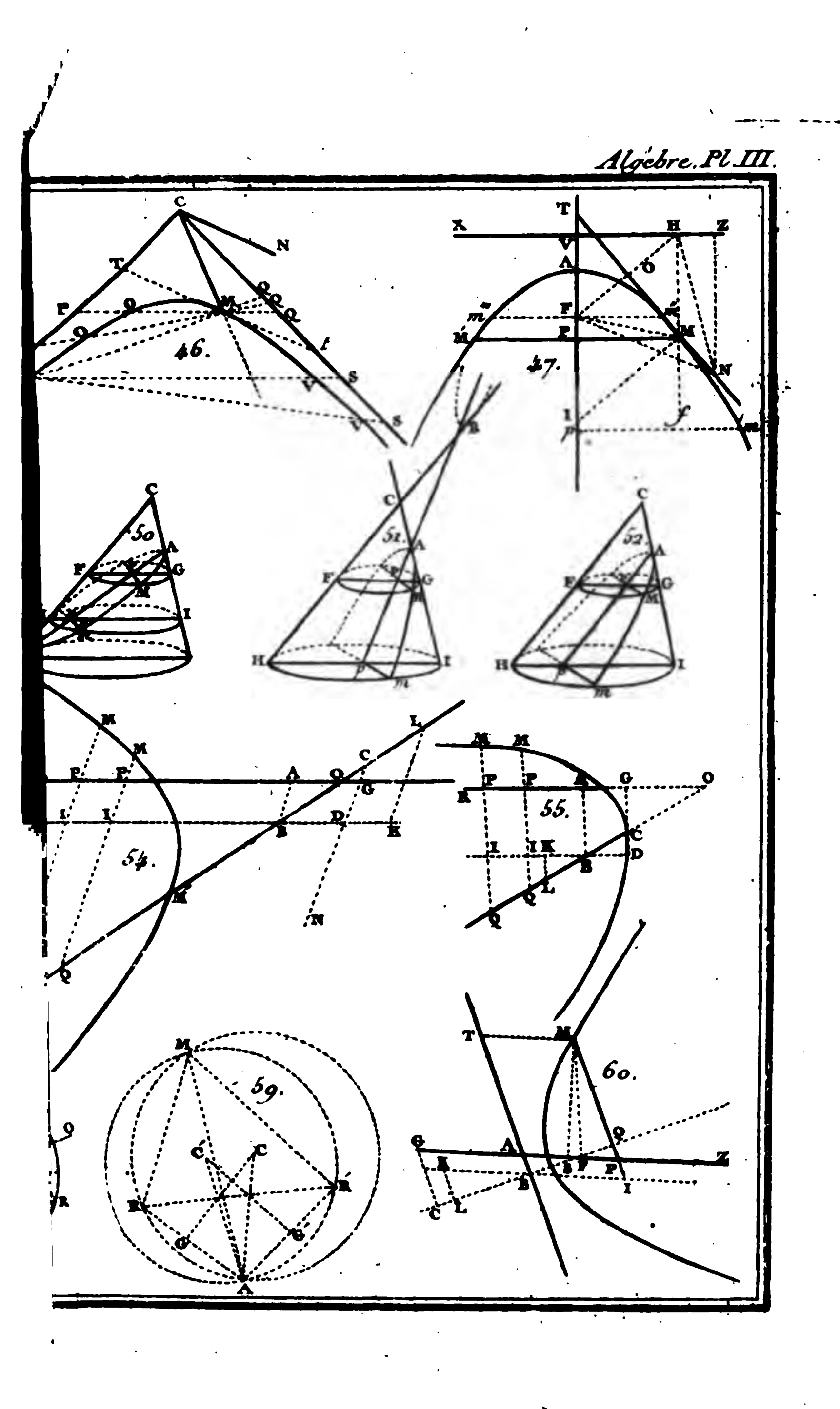
Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences.

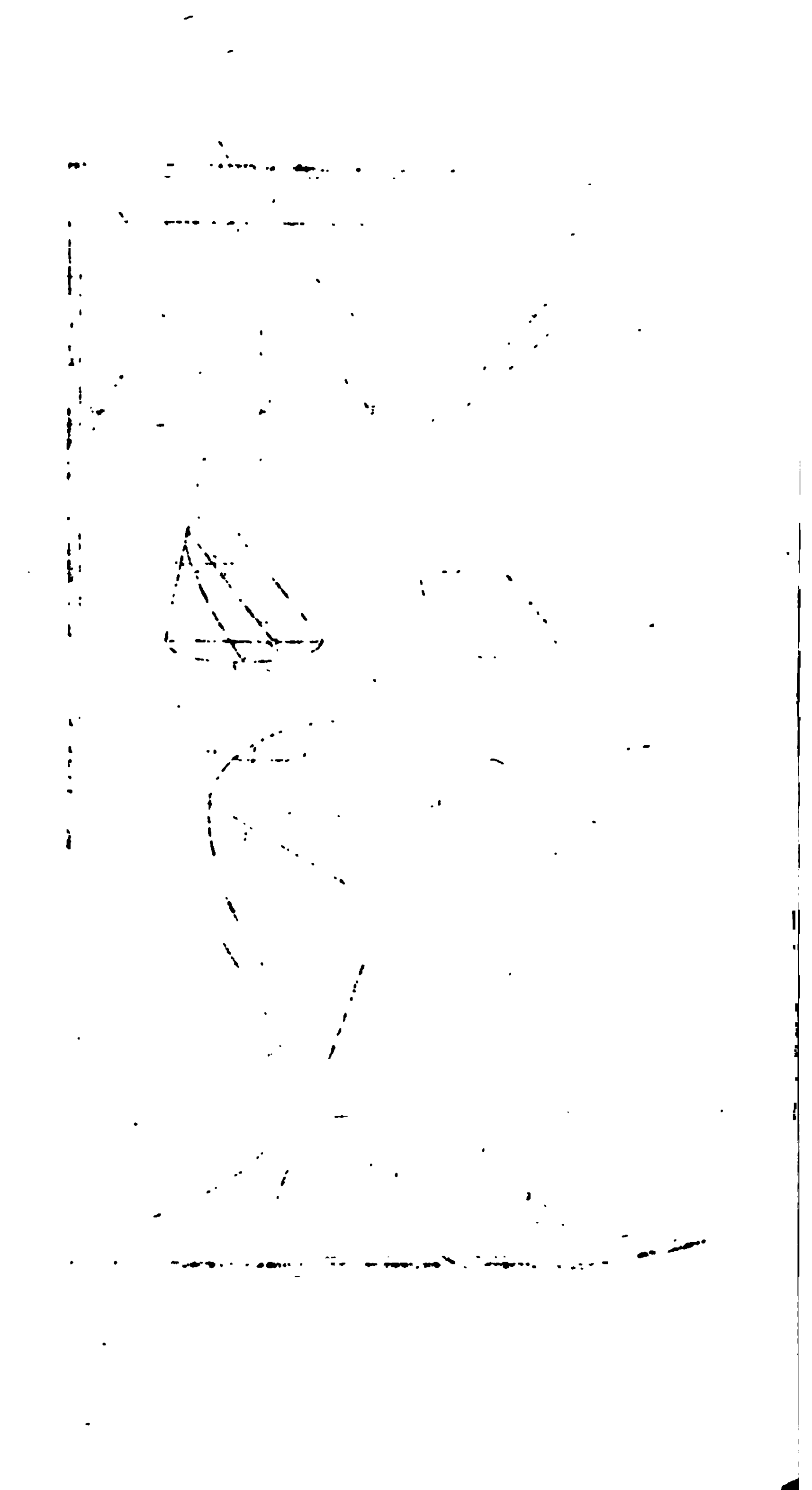
De l'Imprimerie de STOUPE, rue de la Harpe.

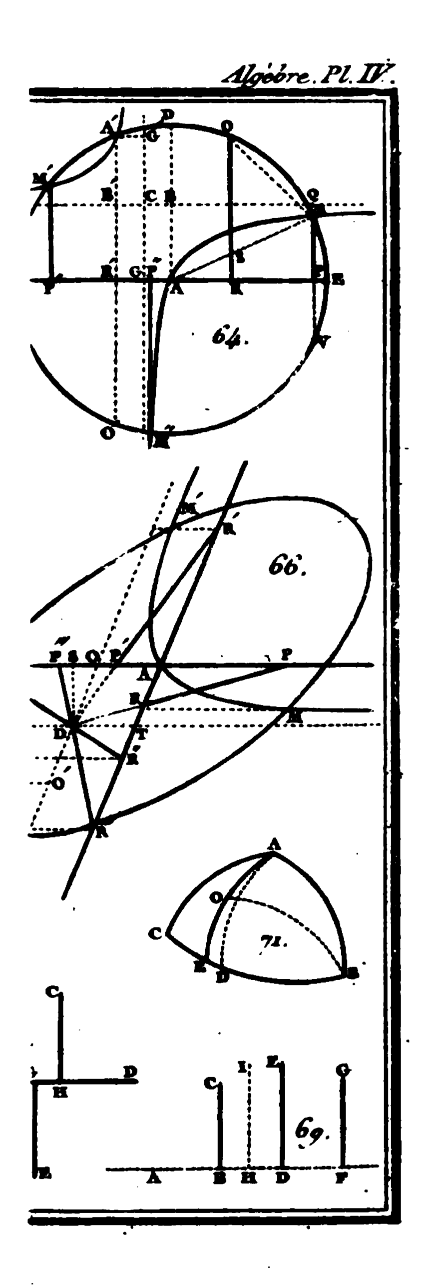

4.
5.
6.
7.
12.
13.
16.
17.
19.
20.
23.
24.
26.
27.
30.
31.


34.
35.
37.
39.
40.
41.
42.
44.




46.
47.
50
51.
52.
54.
55.
59.
60.




64.
66.
71.
69.

